

PODSTAWY EKONOMETRII

z elementami
algebry liniowej

Eligiusz W. Nowakowski

**PODSTAWY
EKONOMETRII**
z elementami
algebry liniowej

WSZECHNICA POLSKA

— SZKOŁA WYŻSZA —
TOWARZYSTWA WIEDZY POWSZECHNEJ W WARSZAWIE

Recenzent
prof. dr hab. Wiesław Sasin

Redakcja tekstu
Bogumił Paszkiewicz

Projekt graficzny i typograficzny
Krystyna Bukowczyk

Skład i łamanie
Agencja KUBA

Copyright © Eligiusz Wojciech Nowakowski
Copyright © Wszechnica Polska Szkoła Wyższa TWP w Warszawie, 2011

ISBN 978-83-89077-15-8

WSZECHNICA POLSKA

— SZKOŁA WYŻSZA —
TOWARZYSTWA WIEDZY POWSZECHNEJ W WARSZAWIE

Pałac Kultury i Nauki
00-901 Warszawa, pl. Defilad 1
Infolinia: 0 801 033 101
rekrutacja@wszechnicapolska.edu.pl

www.wszechnicapolska.edu.pl

Spis treści

WPROWADZENIE	7
Rozdział 1	
ELEMENTY ALGEBRY LINIOWEJ	10
1.1. PRZESTRZEŃ WEKTOROWA (LINIOWA)	10
1.2. MACIERZE I DZIAŁANIA NA NICH	15
1.2.1. Dodawanie macierzy	17
1.2.2. Mnożenie macierzy	19
1.2.3. Wyznacznik	20
1.2.4. Macierz odwrotna	27
Rozdział 2	
MODELE EKONOMETRYCZNE	35
2.1. ZADANIA EKONOMETRII	35
2.2. POSTAĆ MODELU	36
2.3. KLASYFIKACJA ZMIENNYCH WYSTĘPUJĄCYCH W MODELU	38
2.4. KLASYFIKACJA MODELI EKONOMETRYCZNYCH	39
2.5. METODA EKONOMETRII	47
2.6. ESTYMACJA PARAMETRÓW STRUKTURALNYCH JEDNORÓWNANIOWEGO MODELU EKONOMETRYCZNEGO	50
2.7. WERYFIKACJA JEDNORÓWNANIOWEGO MODELU EKONOMETRYCZNEGO	60
2.7.1. Weryfikacja merytoryczna	60
2.7.2. Badanie koincydencji	61
2.7.3. Współczynnik determinacji R^2	62
2.7.4. Weryfikacja statystyczna jednorównaniowego modelu ekonometrycznego	65
2.7.5. Autokorelacja składnika losowego	68
ZADANIA DO ROZDZIAŁU 2	70
Rozdział 3	
PROGRAMOWANIE LINIOWE	75
3.1. WPROWADZENIE	75
3.2. ZADANIE PROGRAMOWANIA LINIOWEGO	76

3.3. WŁASNOŚCI ZADANIA PROGRAMOWANIA LINIOWEGO	83
3.4. METODA SIMPLEX	88
3.4.1. Zadanie startowe	88
3.4.2. Tablica Simplex	92
3.5. ZADANIE DUALNE PROGRAMOWANIA LINIOWEGO ...	104
ZADANIA DO ROZDZIAŁU 3	110
Rozdział 4	
ZADANIE TRANSPORTOWE PROGRAMOWANIA LINIOWEGO	115
4.1. SFORMUŁOWANIE ZADANIA TRANSPORTOWEGO	119
4.3. METODY WYZNACZANIA ROZWIĄZAŃ WSTĘPNYCH	120
4.3.1. Metoda kąta północno-zachodniego [MKPZ]	121
4.3.2. Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów [MMEMK]	123
4.3.3. Metoda VAM [VAM]	125
4.4. OBLICZANIE WSKAŹNIKÓW OPTYMALNOŚCI METODĄ POTENCJAŁÓW	126
4.5. SZUKANIE ROZWIĄZANIA OPTYMALNEGO PRZY POMOCY METODY GRAFÓW I POTENCJAŁÓW ...	129
4.6. WARUNKI NAKŁADANE NA ROZWIĄZANIE	133
4.6.1. Trasy niedopuszczalne	133
4.6.2. Ograniczona przepustowość tras	135
ZADANIA DO ROZDZIAŁU 4	140
BIBLIOGRAFIA	147

WPROWADZENIE

Ekonometria zajmuje się zastosowaniem metod ilościowych do mierzenia, analizy i prognozowania zjawisk i relacji gospodarczych, przez co zalicza się do szeroko rozumianych nauk społecznych. Można określić ekonometrię, jako tę dziedzinę, która wykorzystując aparat statystyki i matematyki wprowadza metody ilościowe do nauk społecznych, a zwłaszcza ekonomii. Dzięki temu pozwala ona nadać aspekt ilościowy wielu zjawiskom. Od ekonometrii można oczekiwać potwierdzenia wielu hipotez, stawianych przez badaczy. Wyniki modeli dostarczają również informacji, które wskazują na siłę zależności oraz ich kierunek i ewentualne opóźnienie w czasie. Dlatego ekonometria potwierdza wiele badanych praw społecznych czy ekonomicznych. Dodatkowo ekonometria daje narzędzia wykorzystywane w wielu dziedzinach życia. Bardzo często użytkownik rozmaitych informacji nie zdaje sobie nawet sprawy z faktu, że są one dostarczone przez oszacowany wcześniej model ekonometryczny.

Ekonometria może być rozumiana na dwa sposoby. Pierwszy dotyczy wąskiego rozumienia narzędzi ekonometrycznych, głównie modeli procesów i zjawisk gospodarczych. Rozumiejąc ekonometrię w wąskim sensie, można uznać, że jest to nauka pozwalająca modelować zjawiska zachodzące w rzeczywistości i weryfikować hipotezy ekonomiczne dotyczące tych zjawisk, a także – umożliwiającą prognozowanie wyników działalności gospodarczej na podstawie oszacowanych modeli.

Drugie – szersze – rozumienie ekonometrii uwzględnia stosowany aparat statystyczny nie tylko do analiz modeli. W tym przypadku chodzi bardziej o optymalizację procesów i podejmowanych decyzji. W takim znaczeniu jest ona częścią nauk zarządzania, a zwłaszcza badań operacyjnych. Szczególnie często wówczas kojarzona jest z programowaniem liniowym, czy szerzej programowaniem matematycznym (kwadratowym, nieliniowym).

Zastosowanie badań operacji jest łatwo widoczne w procesach optymalizacji logistyki. Ta część procesu dostawy towaru od producenta do

odbiorcy może być w stosunkowo prosty sposób optymalizowana, a często olbrzymie koszty dostaw mogą być kontrolowane przez użytkowników modeli. Niniejsza praca zawiera jedynie część szerokiego obszaru służącego optymalizacji logistyki, ogranicza się mianowicie do zagadnienia programowania transportowego.

Ekonometria – jak to już zaznaczono – jest dziedziną, która służy dostarczeniu informacji i potwierdzeniu wielu stawianych hipotez. Dzięki niej można zbadać siłę zależności i na tej podstawie podejmować decyzje, zarówno w skali makro, jak i mikro. Współczesne metody ekonometryczne umożliwiają budowę modeli, odpowiadających zjawiskom gospodarczym tak w skali kraju, jak i gospodarstwa domowego. Świadczą o tym przyznane przed kilku laty nagrody Nobla właśnie dla badaczy zjawisk w skali mikro, obejmujących przede wszystkim optymalizację budżetów domowych.

Niniejsza książka to szersza, uaktualniona i poprawiona wersja pracy *Wstęp do ekonometrii z zadaniami*. Stanowi ona efekt wieloletniej pracy dydaktycznej ze studentami studiów dziennych i zaocznych. W pracy rozszerzono przede wszystkim praktyczną stronę tematu. Przedstawiono też przykłady zadań wraz z rozwiązaniami, a do niektórych zadań, po zakończeniu każdego rozdziału, przedstawiono odpowiedzi lub wskazówki do ich rozwiązania. W pewnych przypadkach – zwłaszcza zadań trudniejszych – pokazano całe rozwiązania. Dlatego też podręcznik może stanowić podstawową pomoc dla studiujących ekonometrię na wyższych uczelniach. Oczywiście, osoby studiujące ekonometrię jako główny kierunek, znajdą bogatą literaturę, również w języku polskim. Niniejsza praca może być wstępem, dającym podstawy do bardziej zaawansowanych studiów. Z drugiej strony, dla studentów kierunków związanych z finansami, zakres pracy jest wystarczający do poznania i płynnego wykorzystywania instrumentów ekonometrii. Zakres tematów oraz sposób ich omówienia wskazują, że podręcznik adresowany jest przede wszystkim do studentów, dla których ekonometria nie jest podstawowym kierunkiem studiów; pozwala jedynie na zapoznanie się z tą dziedziną w sposób podstawowy. Książka prezentuje najważniejsze metody estymacji, a także wybrane metody weryfikacji uzyskanych wyników w trakcie modelowania i estymacji parametrów strukturalnych modeli. Daje podstawową wiedzę w zakresie ekonometrii.

Koniecznym warunkiem do studiowania zawartego w książce materiału jest znajomość w co najmniej podstawowym stopniu matema-

tyki wyższej, w tym przede wszystkim algebry liniowej. Umiejętność działania na macierzach, a także podstawy statystyki matematycznej, są warunkiem zrozumienia technik ekonometrycznych. Dlatego też pierwsza część pracy obejmuje wprowadzenie do algebry macierzy. Zwyczajnie układ zajęć na studiach zachowuje właśnie taką kolejność: wykłady z ekonometrii poprzedzone są wykładami z algebry. Pierwszą część należy więc rozumieć jako przypomnienie tej wiedzy, którą przekazują wykładowcy na zajęciach z algebry liniowej.

Książka składa się z trzech zasadniczych części. Pierwsza to wstęp do algebry liniowej i rachunku macierzowego. Druga część dotyczy zagadnień związanych z modelami ekonometrycznymi, w tym budową modeli, doбором zmiennych, metodami szacowania parametrów strukturalnych modeli, sposobem weryfikacji oszacowanych parametrów, dokonywaniem prognoz. W stosunku do *Wstępu do ekonometrii z zadaniami* ta część uległa rozbudowaniu również o podstawowe testy. Ponadto szerzej potraktowano inne metody niż Klasyczna Metoda Najmniejszych Kwadratów.

Ostatnia część zawiera elementy programowania liniowego wraz z zadaniem transportowym w programowaniu liniowym. Zostały pokazane proste metody znajdowania rozwiązań zadań, służących poprawie sposobu zarządzania logistyką dostaw. Ta część uległa rozszerzeniu o elementy optymalizacyjne przy pewnych warunkach pobocznych, zwłaszcza nakładanych na przepustowość tras.

Osoby, chcące poszerzyć swą wiedzę w zakresie ekonometrii i zastosowania metod optymalizacyjnych, mogą skorzystać z bibliografii podanej na końcu podręcznika.

Rozdział 1

ELEMENTY ALGEBRY LINIOWEJ

Algebra liniowa jest tą częścią matematyki wyższej, która znajduje zastosowanie w szacowaniu parametrów strukturalnych modeli ekonometrycznych. Już samo zbieranie danych, na podstawie których szacowane są później parametry, odbywa się za pomocą macierzy. Kolejne przekształcenia, mnożenia czy odwracanie macierzy – to działania należące do algebry. Dlatego warunkiem poznania metod ekonometrycznych jest wcześniejsze poznanie, czy właściwie przypomnienie sobie zasad algebry. Do materiału ekonometrii objętego niniejszą książką wystarczają podstawy algebry. Zostały one przedstawione poniżej.

1.1. PRZESTRZEŃ WEKTOROWA (LINIOWA)

Niepusty zbiór, którego elementami są wektory i na którym określone są dwa działania:

- dodawanie – każdej parze wektorów jest przyporządkowany pewien wektor należący do tej przestrzeni zwany ich sumą,
- mnożenie wektora przez liczbę rzeczywistą – każdej parze wektora, liczba przyporządkowany jest pewien wektor należący do tej przestrzeni, zwany iloczynem wektora i liczby nazywamy przestrzenią wektorową.

Równoważny z powyższym zapisem jest zapis mówiący, że *przestrzenią wektorową n -wymiarową* nazywamy *n -wymiarową przestrzeń arytmetyczną*, na której elementach zostały określone dwa działania: dodawanie i mnożenie przez liczbę rzeczywistą. Elementy *n -wymiarowej przestrzeni arytmetycznej*, na których zostało określone dodawanie i mnożenie przez liczbę rzeczywistą, nazywamy *wektorami*¹.

Wektory będziemy oznaczać małymi literami półgrubymi w odróżnieniu od liczb, zwanych *skalarami*. Elementami wektora są liczby, dla-

¹ Wektory będziemy oznaczać małymi literami alfabetu łacińskiego, pisane tłustym (pogrubionym) drukiem **a**, **b**. Wektor, dopóki nie będzie na nim wykonana operacja transpozycji, będzie uważany za wektor kolumnowy.

tego też są one przedstawiane zwykłą czcionką. Wektor $\mathbf{a}$ będziemy zapisywać w postaci jednej kolumny (wektor kolumnowy), a jego transpozycję (oznaczaną literą^T) – w postaci wiersza. Transponowanie oznacza zamianę kolumny na wiersz. Pokazuje to przykładowy zapis wektora trzelementowego:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{a}^T = [2 \ 3 \ 1]$$

Sumowanie wektorów jest możliwe wówczas, gdy ich wymiary są jednakowe. Wektor ma zawsze jedną kolumnę, natomiast może mieć różną liczbę wierszy (to jest liczbę elementów w kolumnie), gdyż może pochodzić z innej przestrzeni. Wektory przestrzeni n -wymiarowej mają n elementów w kolumnie.

Sumą dwóch wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, (w poniższym przypadku n -wymiarowych)

$$\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ i } \mathbf{b}^T = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

nazywamy wektor

$$\mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

PRZYKŁAD 1.1. Wylicz wektor $\mathbf{c}$, będący sumą wektorów w zapisie wierszowym: $\mathbf{a}^T = (2, 3, 4)$ i $\mathbf{b}^T = (1, 0, 2)$.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2+1 \\ 3+0 \\ 4+2 \end{bmatrix} \quad \text{czyli } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Wektor ten ma także n współrzędnych, będących sumami odpowiednich współrzędnych wektorów dodawanych.

Iloczynem liczby rzeczywistej λ i wektora $\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ nazywamy wektor

$$\lambda \mathbf{a}^T = \lambda (a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n),$$

którego współrzędne są równe iloczynowi odpowiednich współrzędnych wektora $\mathbf{a}$ przez liczbę λ .

PRZYKŁAD 1.2. Wylicz wektor $\mathbf{b}$, będący iloczynem liczby 10 i wektora wierszowego $\mathbf{a}^T = (2, 3, 4)$.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \lambda=10 \quad \lambda \mathbf{a} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \cdot 2 \\ 10 \cdot 3 \\ 10 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Wektorem zerowym nazywamy wektor, którego wszystkie współrzędne są równe zero. Oznaczamy go $\mathbf{0}$. Bardzo ważne, zwłaszcza z punktu widzenia zastosowania w metodzie SIMPLEX są macierze jednostkowe, których składowymi są wektory jednostkowe. Stąd wektorem jednostkowym będziemy nazywać wektor, którego elementami są zera, poza jednym elementem, który ma wartość 1. Poniżej pokazano trzy wektory jednostkowe w przestrzeni 3-wymiarowej

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wektory te, zestawione w macierzy tworzą właśnie macierz jednostkową:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Innym ważnym pojęciem w algebrze jest iloczyn skalarny. Jest on iloczynem dwóch wektorów, pierwszego w postaci transponowanej i drugiego w postaci kolumnowej. Iloczyn taki jest sumą iloczynów poszczególnych par elementów obu wektorów. Pokazane zostało to poniżej.

Niech

$$\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \mathbf{b}^T = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Iloczynem skalarnym wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ nazywamy liczbę

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

czyli

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

jest liczbą (skalarem). W ekonometrii wykorzystywane są często iloczyny skalarne wektorów obserwacji zmiennych objaśnianych i objaśniających. Stąd warto zapamiętać, że iloczyn skalarny $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}$ jest sumą kwadratów elementów wektora.

PRZYKŁAD 1.3. Wylicz iloczyn skalarny wektora $\mathbf{a}$ i wektora $\mathbf{b}$, gdzie wektory w postaci wierszowej mają postać

$$\mathbf{a}^T = (2, 3, 4) \text{ i } \mathbf{b}^T = (1, 0, 2).$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{a ich iloczyn } \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = [2 \ 3 \ 4] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 10.$$

Własności iloczynu skalarnego:

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a}$$

$$(\lambda \mathbf{a})^T \cdot \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}),$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{c}$$

Równie ważna, zwłaszcza w przypadku odwracania macierzy jest niezależność liniowa wektorów. W celu poznania niezależności liniowej wektorów, początkowo wprowadzone zostanie pojęcie kombinacji liniowej.

Niech $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$ oznacza układ wektorów w przestrzeni wektorowej n -wymiarowej γ_n . Wektor

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k$$

nazywamy *kombinacją liniową* tych wektorów. Kombinacja liniowa jest zatem wektorem, którego elementy są równe sumie odpowiednich elementów wszystkich wektorów wchodzących w skład kombinacji pomnożonych przez liczby λ_i .

Będziemy mówić, że układ wektorów $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$ nazywamy *liniowo zależnym*, jeżeli istnieje taki układ liczb $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ nie wszystkich jednocześnie równe zero, że

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$$

Dopiero po tym wstępie można zdefiniować wektory liniowo niezależne. Układ wektorów $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$ nazywamy *liniowo niezależnym*, gdy

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0},$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

PRZYKŁAD 1.4. Wykaż, że wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, są liniowo niezależne, gdzie wektory w postaci wierszowej mają postać

$$\mathbf{a}^T = (2, 3, 4) \text{ i } \mathbf{b}^T = (1, 0, 2).$$

Wektory mnożymy przez liczby λ_1 oraz λ_2 i szukamy, dla jakich λ_1 oraz λ_2 ich kombinacja liniowa jest równa wektorowi zerowemu:

$$\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Jak łatwo widać jednocześnie powyższy układ trzech równań z dwiema niewiadomymi spełniają jedynie λ_1 oraz λ_2 jednocześnie równe zerom. Oznacza to, że te dwa wektory są liniowo niezależne.

PRZYKŁAD 1.5. Wykaż, że wektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$, są liniowo zależne, gdzie wektory w postaci wierszowej mają postać $\mathbf{a}^T = (2, 3, 4)$ i $\mathbf{b}^T = (1, 0, 2)$, $\mathbf{c}^T = (1, 3, 2)$.

Podobnie jak poprzednio wektory mnożymy przez liczby λ_1 , λ_2 oraz λ_3 i szukamy dla jakich λ_1 , λ_2 oraz λ_3 ich kombinacja liniowa jest równa wektorowi zerowemu:

$$\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ponownie łatwo widać, że powyższy układ jest spełniony również dla innych λ_1 , λ_2 oraz λ_3 , niż wszystkie jednocześnie równe zero. Takim przykładem jest układ: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ oraz $\lambda_3 = -1$. Dla tych liczb kombinacja jest równa wektorowi zerowemu. Można zatem potwierdzić, że wektory są liniowo zależne. Każdy z nich można przedstawić jako kombinację liniową dwóch pozostałych. W szczególności wektor $\mathbf{c}$ jest równy różnicy pomiędzy wektorem $\mathbf{a}$ i wektorem $\mathbf{b}$.

TWIERDZENIE 1.1. Układ wektorów $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z tych wektorów jest liniową kombinacją pozostałych.

TWIERDZENIE 1.2. Każdy układ $n + 1$ wektorów przestrzeni R_n jest liniowo zależny.

Dowód drugiego twierdzenia jest automatyczny, jeżeli wiemy, że bazą przestrzeni wektorowej R_n nazywamy każdy układ n liniowo niezależnych wektorów tej przestrzeni. Baza rozpina przestrzeń. Każdy wektor tej przestrzeni można przedstawić, jako kombinację liniową wektorów tej bazy.

1.2. MACIERZE I DZIAŁANIA NA NICH

Układ $m \times n$ liczb (lub funkcji) a_{ij} zapisany w postaci tablicy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

o m wierszach i n kolumnach nazywamy macierzą o wymiarach $m \times n$.

Liczby a_{ij} , gdzie: $i = 1, 2, \dots, m$, są elementami wiersza j macierzy, natomiast liczby a_{ij} dla $j = 1, 2, \dots, n$ są elementami kolumny i macierzy. Wskaźniki i oraz j informują, że element a_{ij} występuje w macierzy w wierszu o numerze i oraz w kolumnie o numerze j .

Dla oznaczenia macierzy będziemy używali półgrubych liter wielkich, takich jak: **A**, **B**, **C**. Możliwe będzie również przedstawianie macierzy za pomocą ich elementów w postaci symboli $[a_{ij}]$, $[b_{ij}]$, $[c_{ij}]$, gdzie zawsze $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

PRZYKŁAD 1.6. Napisać macierz 3×3 , której kolumnami są wektory, mające w postaci wierszowej postać: $\mathbf{a}^T = (2, 3, 4)$ i $\mathbf{b}^T = (1, 0, 2)$, $\mathbf{c}^T = (1, 3, 2)$.

Wektory te, jako elementy macierzy przedstawia:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Macierz, w której liczba wierszy równa się liczbie kolumn (tzn. $m = n$) nazywamy *macierzą kwadratową stopnia n* . Pokazana w poprzednim przykładzie macierz jest macierzą kwadratową o wymiarach 3×3 .

W niektórych przypadkach w ekonometrii zasadnicze znaczenie odgrywają elementy diagonalne (leżące na głównej przekątnej). Układ elementów ($a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$) w macierzy kwadratowej stopnia n nazywamy *elementami diagonalnymi* lub *główną przekątną macierzy*.

Zgodnie z uwagami z poprzedniej części, macierze o wymiarach $m \times 1$ lub $1 \times n$ nazywamy odpowiednio *wektorem kolumnowym* lub *wektorem wierszowym*.

W ekonometrii wśród często wykonywanych działań na macierzach jest ich transpozycja. Dlatego też *transponowana* macierz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ o wymiarach $m \times n$ staje się macierzą $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]$ o wymiarach $n \times m$. Wiersze macierzy transponowanej stają się kolumnami macierzy $\mathbf{A}$.

Nie zawsze działania na macierzach mogą być wykonane. W działaniach na macierzach zasadnicze znaczenie odgrywają ich wymiary. Dlatego na przykład przy mnożeniu macierzy ważne jest, by macierz pierwsza miała tyle kolumn, ile wierszy ma macierz druga. W dodawaniu konieczna jest zgodność zarówno liczby wierszy, jak i kolumn. Dlatego przed wykonaniem działań należy sprawdzić, czy wymiary macierzy pozwalają na wykonanie działań.

PRZYKŁAD 1.7. Napisać macierz transponowaną do macierzy $\mathbf{A}_{2 \times 3}$, której wierszami są wektory mające w postaci wierszowej postać

$$\mathbf{a}^T = (2, 3, 1) \text{ i } \mathbf{b}^T = (0, -2, 5).$$

W takim przypadku

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix},$$

natomiast

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

ma wymiary 3×2 .

Pierwsza kolumna macierzy $\mathbf{A}$ jest pierwszym wierszem macierzy transponowanej, druga kolumna – drugim wierszem i trzecia kolumna – trzecim wierszem.

PRZYKŁAD 1.8. Niech będą dane macierze:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & \frac{2}{3} \\ 5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Co można powiedzieć o powyższych macierzach?

Macierz **A** ma wymiary 2 x 3, macierz **B** 2 x 2, macierz **C** 3 x 2 a macierze **D**, **E**, **F** są kwadratowe o wymiarach 3x3.

Macierz **B** jest macierzą kwadratową stopnia drugiego. Elementy 5 i 4 w tej macierzy stanowią główną przekątną.

Macierz **D** jest macierzą kwadratową stopnia trzeciego. Główna przekątną tej macierzy tworzą elementy 2, 2, 1.

Macierz **E** jest *macierzą trójkątną* (wszystkie elementy tej macierzy występujące poniżej głównej przekątnej są równe zero).

Macierz **F** jest *macierzą diagonalną*, ponieważ wszystkie elementy tej macierzy, poza elementami głównej przekątnej, są równe zero.

1.2.1. Dodawanie macierzy

Macierz **A** jest równa macierzy **B** wówczas, gdy wymiary macierzy są identyczne i każdy element o wymiarach i, j jest taki sam. Jeśli $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, są macierzami o tych samych wymiarach, to $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{ij} = b_{ij}$ dla $i = 1, 2, \dots, m$, oraz $j = 1, 2, \dots, n$.

Na macierzach określone są działania dodawania i mnożenia, zarówno przez liczbę jak i przez macierz. Wykonywanie działań na macierzach jest możliwe tylko wówczas, gdy odpowiednie wymiary macierzy dodawanych lub mnożonych są identyczne.

W przypadku dodawania macierzy **A** i **B** muszą one mieć te same wymiary. Dodawanie jest przemienne, co oznacza, że $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

W przypadku mnożenia macierzy wymiary „wewnętrzne” iloczynu muszą być takie same, a wynik ma wymiary „zewnętrzne”. Oznacza to, że mnożenie macierzy $\mathbf{A}_{3 \times 4}$ oraz $\mathbf{B}_{4 \times 5}$ jest możliwe, a w wyniku tego mnożenia powstanie macierz **C** o wymiarach 3 x 5. Pokazuje to właśnie warunek zgodności wymiarów wewnętrznych iloczynu macierzy.

$$\mathbf{A}_{3 \times 4} \cdot \mathbf{B}_{4 \times 5} = \mathbf{C}_{3 \times 5}$$

gdzie cztery kolumny macierzy **A** odpowiadają czterem wierszom macierzy **B**, a w wyniku mnożenia otrzymujemy macierz $C_{3 \times 5}$ o liczbie wierszy macierzy **A** i liczbie kolumn macierzy **B**.

Niech $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$ będą macierzami o wymiarach $m \times n$.

Macierz **C** jest *sumą macierzy A i B*, co zapisujemy $A + B = C$, wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, dla każdego $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

PRZYKŁAD 1.9. Niech będą dane macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

Wykonaj możliwe dodawania macierzy.

Ze względu na wymiary macierzy możliwe jest dodawanie macierzy **A** i **C** i ewentualne wielokrotne dodawanie jednakowych macierzy (na przykład $B + B$).

$$\begin{aligned} D = B + C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2 & 1+0 & 4+2 \\ 3+4 & 1+3 & 5+0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 7 & 4 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$E = B + B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Druga suma jest równoważna iloczynowi liczby 2 i macierzy **B**. Dlatego też wygodnie jest zdefiniować iloczyn liczby rzeczywistej i macierzy. Mnożenie przez liczbę jest skróconym dodawaniem. Zamiast dodawać te same macierze, można pomnożyć ich elementy przez odpowiednią liczbę, równo liczbie dodawań. Można zapisać, że iloczynem macierzy $A = [a_{ij}]$ o wymiarach $m \times n$ i liczby rzeczywistej λ nazywamy macierz $B = [b_{ij}]$, także o wymiarach $m \times n$, której elementy są określone następująco:

$$b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} \text{ dla } i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$$

Wykonane w Przykładzie 1.9 działanie $B + B$ jest równoważne mnożeniu macierzy **B** przez liczbę 2.

PRZYKŁAD 1.10. Dane są macierze:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierze: $\mathbf{C} = 2\mathbf{A}^T - \mathbf{B}$ oraz $\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

Różnicę macierzy możemy zapisać następująco: $\mathbf{C} = 2\mathbf{A}^T + (-1) \mathbf{B}$.

Zatem

$$\mathbf{C} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 2 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Macierzy $\mathbf{D}$ nie można wyliczyć, ponieważ dodawanie wymaga takich samych wymiarów obu macierzy. W przykładzie $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ mają różne wymiary.

1.2.2. Mnożenie macierzy

Jeżeli macierz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ ma wymiary $m \times k$, a macierz $\mathbf{B} = [b_{pr}]$ ma wymiary $k \times n$, to macierz $\mathbf{A}$ możemy pomnożyć przez macierz $\mathbf{B}$. Mnożenie macierzy (w odróżnieniu od mnożenia liczb) nie jest przemienne. „Wewnętrzne” wymiary mnożonych macierzy są tu jednakowe i równe k . Wynik mnożenia będzie miał wymiary „zewnętrzne” macierzy, to jest $m \times n$.

Iloczynem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ macierzy nazywamy taką macierz $\mathbf{C} = [c_{ir}]$ o wymiarach $m \times n$, której elementy są określone wzorami

$$c_{ir} = a_{i1}b_{1r} + a_{i2}b_{2r} + \dots + a_{ik}b_{kr} = \sum_{j=1}^k a_{ij}b_{jr}$$

dla $i = 1, 2, \dots, m$ oraz $r = 1, 2, \dots, n$. Zauważmy, że elementy c_{ir} macierzy $\mathbf{C}$ są iloczynami skalarnymi i -tego wiersza macierzy $\mathbf{A}$ przez k -tą kolumnę macierzy $\mathbf{B}$. Zgodnie z poprzednio dokonaną obserwacją możemy stwierdzić, że na ogół $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

PRZYKŁAD 1.11. Wykonamy mnożenie macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, gdy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Zapiszmy wymiary danych macierzy w postaci: $\mathbf{A}_{(3 \times 2)}$, $\mathbf{B}_{(2 \times 2)}$. Liczba kolumn w $\mathbf{A}$ jest równa liczbie wierszy w $\mathbf{B}$, mnożenie jest więc wykonalne.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a-2c & b-2d \\ 4c & 4d \end{bmatrix}$$

1.2.3. Wyznacznik

Przed wprowadzeniem samego wyznacznika konieczne jest poznanie kilku pojęć, które są wykorzystywane przy liczeniu wyznaczników z macierzy. Do takich pojęć należy rząd macierzy, operacja elementarna, czy dopełnienie algebraiczne.

Rzędem macierzy $\mathbf{A}$ o wymiarach $m \times n$ nazywamy maksymalną liczbę liniowo niezależnych wierszy lub kolumn w tej macierzy. Liczbę tę oznaczamy przez $\text{rz}(\mathbf{A})$. Rząd macierzy kwadratowej, która często występuje w ekonometrii (np.: $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$) powinien być równy wymiarowi tej macierzy. W przeciwnym przypadku nie jest bowiem możliwe wyliczenie macierzy odwrotnej.

Operacją elementarną na macierzy nazywamy każde z następujących przekształceń:

- a) mnożenie przez dowolną liczbę różną od zera wszystkich elementów dowolnego wiersza (kolumny) macierzy,
- b) dodawanie do elementów dowolnego wiersza (kolumny) odpowiednich elementów innego wiersza (kolumny) macierzy,
- c) zamiana miejscami (przestawienie) dwóch dowolnych wierszy (kolumn) macierzy.

Operacje te odpowiadają mnożeniu przez pewne nieosobliwe (mające rząd równy liczbie wierszy i kolumn, macierzy kwadratowe) macierze, przy czym działania na wierszach odpowiadają mnożeniu lewostronnemu a działania na kolumnach mnożeniu prawostronnemu.

Operacje elementarne nie zmieniają rzędu macierzy. Dzięki operacjom elementarnym można macierz zredukować do postaci składającej się tylko z liniowo niezależnych wierszy lub kolumn i w ten sposób można bardzo łatwo wyznaczyć rząd tej macierzy.

PRZYKŁAD 1.12. Znajdź wynik dokonania operacji elementarnej, polegającej na pomnożeniu macierzy $\mathbf{A}$ przez macierz $\mathbf{E}$, gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

W wyniku mnożenia tych macierzy uzyska się:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{AE} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

co oczywiście jest zamianą kolumn,

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{EA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},$$

co jest zamianą wierszy w macierzy $\mathbf{A}$.

Operacje elementarne są często wykorzystywane do obliczania macierzy odwrotnej. Dotyczy to nie tyle obliczania oszacowań parametrów strukturalnych modeli ekonometrycznych, ale przede wszystkim wyliczania rozwiązań optymalnych (za pomocą metody Simplex) w programowaniu liniowym. Z kolei znajdowanie macierzy odwrotnej koniecznej do znalezienia estymatora parametrów strukturalnych wygodniej jest liczyć metodą Laplace'a, niż przy zastosowaniu operacji elementarnych. Metoda ta do wyznaczenia odwrotności macierzy wymaga znajomości wyznacznika tej macierzy. Dlatego też konieczne jest wprowadzenie pojęcia wyznacznika.

Każdej macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ (i tylko takiej) można przyporządkować pewną (tylko jedną) liczbę zwaną jej *wyznacznikiem* i oznaczoną symbolem $\det \mathbf{A}$ lub rzadziej $|\mathbf{A}|$.

Wyznacznikiem macierzy $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ dla $i, j = 1, 2, \dots, n$ jest liczba

$$\det \mathbf{A} = \sum_p (-1)^\alpha a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n},$$

gdzie: $k_1, k_2, \dots, k_n$ jest permutacją liczb $1, 2, \dots, n$, liczba α jest liczbą inwersji² w tej permutacji natomiast sumowanie odbywa się względem wszystkich $n!$ permutacji liczb $1, \dots, n$.

PRZYKŁAD 1.13. Na podstawie definicji obliczymy wyznacznik macierzy kwadratowej drugiego stopnia

² Liczby k_1 i k_2 tworzą inwersję, jeżeli $k_1 > k_2$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Mamy tu macierz stopnia drugiego. Zatem w macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

liczba permutacji jej elementów wynosi $2! = 2$. Są to permutacje 1,2 oraz 2,1. Permutacja 1,2 jest permutacją główną (podstawową) i liczba inwersji (nieporządków) w tej permutacji wynosi 0. W permutacji 2,1 liczba inwersji wynosi 1 (liczba 2 poprzedzająca liczbę 1).

Zatem

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Dla danej w przykładzie macierzy mamy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 20 - 6 = 14$$

Wyznacznik macierzy wynosi 14.

Podobnie prosto z definicji można policzyć wyznacznik macierzy trzeciego stopnia.

PRZYKŁAD 1.14. Na podstawie definicji obliczymy wyznacznik macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jest to wyznacznik macierzy stopnia trzeciego, a więc macierzy postaci ogólnej:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Wszystkich permutacji wskaźników stojących przy elementach macierzy, czyli liczb 1, 2, 3 mamy $3! = 6$. Wypiszmy je i obliczmy liczbę inwersji w każdej permutacji:

$$1, 2, 3, k_1 = 0,$$

$$1, 3, 2, k_2 = 1 \text{ (liczba 3 poprzedza liczbę 2),}$$

$$3, 1, 2, k_3 = 2 \text{ (liczba 3 poprzedza liczby 1 i 2),}$$

$$2, 1, 3, k_4 = 1 \text{ (liczba 2 poprzedza liczbę 1),}$$

$$2, 3, 1, k_5 = 2 \text{ (liczby 2 i 3 poprzedzają liczbę 1),}$$

$$3, 2, 1, k_6 = 3 \text{ (liczba 2 i 3 poprzedzają liczbę 1 oraz 3 poprzedza 2).}$$

Dlatego też

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (-1)^0 a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^1 a_{11} a_{23} a_{32} + \\ &+ (-1)^2 a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^1 a_{12} a_{21} a_{33} + (-1)^2 a_{12} a_{23} a_{31} + (-1)^3 a_{13} a_{22} a_{31} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Dla macierzy danej w zadaniu mamy

Z podanych przykładów wynika, że obliczanie wyznacznika macierzy niskich stopni nie jest problemem. Mimo tej łatwości, w praktyce posługujemy się przy obliczaniu wyznaczników macierzy trzeciego stopnia pewnym schematem ułatwiającym postępowanie.

Zgodnie z pokazanym poniżej schematem liczenia wyznacznika, dla macierzy trzeciego stopnia jest on równy:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\ &- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} \end{aligned}$$

W celu łatwiejszego wyliczenia wyznacznika dopiszmy do macierzy jako wiersz czwarty i piąty dwa pierwsze wiersze. Otrzymamy macierz

rozszerzoną, z której liczymy iloczyny:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

której elementy ułożone w iloczyny trójkowe w dół dodajemy a iloczyny trójkowe do góry odejmujemy. Suma tak wyliczonych iloczynów daje w wyniku wyznacznik macierzy.

PRZYKŁAD 1.15. Na podstawie pokazanej metody obliczymy ponownie wyznacznik macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

W tym celu dopisujemy na dole macierzy dwa pierwsze wiersze i mnożymy, pisząc u dołu z plusem a u góry z minusem:

$$-0 \quad -6 \quad -0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} + 4 + 0 + 6$$

W wyniku dodania $-6 + 10$ trzymamy wyznacznik równy 4.

Wyznaczniki macierzy wyższych stopni można obliczać poprzez rozwinięcie Laplace'a macierzy według któregoś wiersza, zwykle tego, w którym jest najwięcej elementów zerowych. Należy poznać pojęcie *minoru elementu* a_{ij} . Jest to wyznacznik macierzy powstałej poprzez wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny macierzy. *Kofaktorem* elementu a_{ij} nazywamy *minor* pomnożony przez $(-1)^{i+j}$. Wówczas wy-

znacznik macierzy można przedstawić według któregoś wiersza jako sumę kofaktorów wymnożonych przez elementy wybranego wiersza.

Bez rozpisywania ogólnego przypadku policzmy wyznacznik dla macierzy trzeciego stopnia zgodnie z tą metodą.

Jeżeli w macierzy $\mathbf{A}$ skreślimy i -ty wiersz, ($i = 1, 2, 3$) oraz k -tą kolumnę ($k = 1, 2, 3$), to otrzymamy macierz stopnia drugiego. Wyznacznik otrzymanej macierzy (zwany *minorem*) pomnożony przez liczbę $(-1)^{1+k}$ nazywamy *dopełnieniem algebraicznym elementu* a_{ik} macierzy $\mathbf{A}$ i oznaczamy symbolem A_{ik} .

Na przykład po skreśleniu drugiego wiersza i trzeciej kolumny wyliczone dopełnienie algebraiczne będzie równe:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = - (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}$$

Wyznacznikiem macierzy stopnia trzeciego nazywamy liczbę

$$\det \mathbf{A} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

gdzie i jest numerem dowolnej kolumny, albo

$$\det \mathbf{A} = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + a_{3k} A_{3k}$$

gdzie k jest numerem dowolnej kolumny.

PRZYKŁAD 1.16. Na podstawie pokazanej metody obliczymy ponownie wyznacznik macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Przyjmijmy $i=2$, gdyż w wierszu tym występuje zero, co pozwoli na to, by nie liczyć wszystkich wyznaczników. Wybraliśmy więc drugi wiersz danej macierzy. Zatem

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= 0 (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 0 + 2(2) + 3(-1)(2 - 2) = 4 \end{aligned}$$

W każdym z trzech sposobów liczenia otrzymaliśmy ten sam wynik.

Z przykładu tego ponadto widać, że przy wyborze numeru wiersza lub kolumny warto pamiętać, że $\det \mathbf{B}$ jest sumą iloczynów, którą krótko możemy zapisać w postaci:

$$\sum_{k=1}^3 a_{ik} A_{ik} \quad \text{lub} \quad \sum_{i=1}^3 a_{ik} A_{ik}$$

Liczba składników w tej sumie może być mniejsza od 3 (3 – stopień macierzy), jeżeli w wybranym wierszu lub kolumnie będzie przynajmniej jeden element równy zero. Ważne więc by przy wyborze numeru wiersza lub kolumny wziąć to pod uwagę.

Wyznacznik macierzy stopnia n jest liczbą określoną wzorem

$$(1) \quad \det \mathbf{A} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}$$

albo

$$(2) \quad \det \mathbf{A} = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \dots + a_{nk} A_{nk} = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik}$$

gdzie: i lub k jest jedną z liczb: 1, 2, ..., n . Wzory (1), (2) są zwane wzorami *Laplace*.

PRZYKŁAD 1.17. Aby obliczyć wyznacznik macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

wyberamy wiersz pierwszy, ponieważ w wierszu tym są 3 elementy zerowe. Dzięki temu wyznacznik macierzy danej jest równy iloczynowi elementu 2 (a_{11}) pomnożonemu przez wyznacznik pozostałej macierzy. Ponownie, tym razem do wyznacznika macierzy trzeciego stopnia warto wziąć jej wiersz pierwszy. Obok liczby -2 ma dwa pozostałe elementy zerowe. Oznacza to, że wyznacznik tej macierzy wyniesie:

$$\det \mathbf{A} = 2 \cdot (-2) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot (-9) = 36$$

Wyznaczniki mają następujące własności:

1. $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$
2. W wyniku zamiany miejscami dwu wierszy (lub kolumn) macierzy $\mathbf{A}$ otrzymujemy macierz $\mathbf{B}$, której wyznacznik jest liczbą przeciwną do $\det \mathbf{A}$.

3. Wyznacznik macierzy o jednakowych dwu wierszach (lub kolumnach) jest równy zero.
4. Jeżeli w macierzy $\mathbf{A}$ pomnożymy elementy jednego wiersza (lub kolumny), przez liczbę λ , to wyznacznik otrzymanej macierzy jest równy $\lambda \det \mathbf{A}$.
5. Jeżeli do elementów pewnego wiersza (lub kolumny) macierzy $\mathbf{A}$ dodamy odpowiednie elementy innego wiersza (lub kolumny) tej macierzy pomnożone przez dowolną stałą, to otrzymamy macierz, której wyznacznik jest równy $\det \mathbf{A}$.
6. Wyznacznik macierzy zawierającej wiersz – wektor zerowy (kolumnę – wektor zerowy) jest równy zero.
7. Wyznacznik macierzy diagonalnej lub trójkątnej jest równy iloczynowi elementów na głównej przekątnej.

1.2.4. Macierz odwrotna

Jeżeli $\mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową i jej wyznacznik jest różny od zera, to $\mathbf{A}$ nazywamy *macierzą nieosobliwą*. W przeciwnym razie macierz kwadratową o wyznaczniku zero nazywamy *macierzą osobliwą*. Macierz nieosobliwa to macierz, której rząd jest równy liczbie wierszy (kolumn). Żaden z wierszy (kolumn) nie może zostać przedstawiony jako kombinacja liniowa innych wierszy. Oczywiście w macierzy osobliwej wiersz lub kolumna jest kombinacją liniową pozostałych wierszy lub kolumn.

PRZYKŁAD 1.18. Sprawdź, czy podane poniżej macierze są nieosobliwe.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową, ale $\det \mathbf{A} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0$. Macierz $\mathbf{A}$ nie jest nieosobliwa. Jest macierzą osobliwą. Wiersz lub kolumna jest kombinacją liniową drugiego wiersza lub drugiej kolumny. Druga kolumna jest dwukrotnością kolumny pierwszej. Drugi wiersz jest dwukrotnością wiersza pierwszego.

Macierz $\mathbf{B}$ także nie jest nieosobliwa, ponieważ nie jest macierzą kwadratową.

Macierz $\mathbf{C}$ jest macierzą kwadratową. Jej wyznacznik $\det \mathbf{C} = 1$. Jest macierzą trójkątną i żaden z elementów diagonalnych nie jest zerem. Zatem $\mathbf{C}$ jest macierzą nieosobliwą.

Jeżeli $\mathbf{A}$ jest macierzą nieosobliwą stopnia n , to istnieje dokładnie jedna taka macierz $\mathbf{B}$, że $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$, gdzie macierz $\mathbf{I}_n$ jest macierzą jednostkową stopnia n . Macierz $\mathbf{B}$ o takiej własności nazywamy *macierzą odwrotną* do macierzy $\mathbf{A}$ i oznaczamy symbolem $\mathbf{A}^{-1}$.

PRZYKŁAD 1.19. Sprawdź, czy odwrotną do macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

jest macierz

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

Zgodnie z definicją, iloczynem macierzy $\mathbf{A}$ i macierzy do niej odwrotnej jest macierz jednostkowa. Właśnie z takim przypadkiem mamy do czynienia, gdyż:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a także

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz nieosobliwą $\mathbf{A}$ można za pomocą ciągu operacji elementarnych sprowadzić do macierzy jednostkowej tego samego stopnia, jaki ma macierz $\mathbf{A}$. Jest to jeden z łatwiejszych sposobów wykorzystywanych do znajdowania macierzy odwrotnej. Odwracanie macierzy drogą operacji elementarnych zabiera jednak więcej czasu, niż inne metody. Jest jednak metodą najprostszą.

PRZYKŁAD 1.20. Za pomocą ciągu elementarnych operacji przekształcimy macierz.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

w macierz jednostkową $\mathbf{I}$ trzeciego stopnia. Macierz ta ma 3 wiersze, oznaczone dalej jako w_1, w_2, w_3 . Macierz jest nieosobliwa, można więc ją przekształcić w macierz $\mathbf{I}$. Poniżej pokazano jeden z kilku sposobów:

Opis operacji na wierszach		Wiersz
$\mathbf{C} =$	1 2 3 0 1 2 2 1 1	w_1 w_2 w_3
w_1 w_2 $w_3 - 2w_1$	1 2 3 0 1 2 0 -3 -5	
$w_1 - 2w_2$ w_2 $w_3 + 3w_2$	1 0 -1 0 1 2 0 0 1	
$w_1 + w_3$ $w_2 - 2w_3$ w_3	1 0 0 0 1 0 0 0 1	$= \mathbf{I}$

Zgodnie z podanym wcześniej opisem, operacje elementarne na wierszach, są lewostronnym mnożeniem macierzy przez pewną macierz nieosobliwą $\mathbf{E}_i$ reprezentującą właśnie i -tą operację elementarną. Końcowy wynik jest iloczynem wszystkich dokonanych mnożeń. Łatwo zauważyć, że

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A iloczynem tych trzech macierzy jest macierz odwrotna do macierzy $\mathbf{C}$. Wykonując bowiem mnożenie $\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{C}$ otrzymano macierz jednostkową. Można zatem nawisać następujący wniosek:

Wniosek 1.

Dla nieosobliwej macierzy $\mathbf{A}_n$ można skonstruować macierz $\mathbf{B}_{(n \times 2n)} = [\mathbf{A}_n \mid \mathbf{I}_n]$. Wykonując na wierszach tej macierzy ciąg odpow-

wiednich operacji elementarnych możemy sprowadzić ją do macierzy $\mathbf{C} = [\mathbf{I}_n \mid \mathbf{A}^{-1}]$, gdzie $\mathbf{A}^{-1}$ jest macierzą odwrotną do $\mathbf{A}$.

PRZYKŁAD 1.21. Za pomocą ciągu elementarnych operacji wyznaczmy macierz odwrotną do macierzy $\mathbf{C}$.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wykonujemy ciąg operacji elementarnych na macierzy $[\mathbf{C} \mid \mathbf{I}]$ tak, ażeby w miejsce macierzy $\mathbf{C}$ otrzymać $\mathbf{I}$:

$\mathbf{C} =$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
w_1 $w_2 - w_1$ $w_3 - 2w_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$w_1 + 2w_2$ $-w_2$ $w_3 - 3w_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
$w_1 + 2/3 w_3$ w_2 $-1/3 w_3$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 2/3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/3 & 1 & -1/3 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{I}_3$	$\mathbf{C}^{-1}$

Sprawdzenie :

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 2/3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/3 & 1 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Można też pokazać, że $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I}$. Zatem $\mathbf{C}^{-1}$ jest macierzą odwrotną do macierzy $\mathbf{C}$.

Istnieje wiele sposobów liczenia macierzy odwrotnej do danej macierzy. Jednym z bardziej popularnych sposobów liczenia macierzy odwrotnej do nieosobliwej macierzy $\mathbf{A}_n = [a_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) wyznacza wzór:

$$(3) \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} [\mathbf{A}_{ij}]^T,$$

gdzie A_{ij} jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy $\mathbf{A}$.

PRZYKŁAD 1.22. Za pomocą dopełnień algebraicznych wyznaczamy macierz odwrotną do macierzy $\mathbf{C}$ z poprzedniego przykładu.

Macierz $\mathbf{C}$ jest nieosobliwa. Jej wyznacznik $\det \mathbf{C} = 1$, a dopełnienia algebraiczne elementów macierzy $\mathbf{C}$ są następujące :

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-4) = 3$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Macierzą odwrotną do $\mathbf{C}$ jest macierz

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Czytelnik zechce samodzielnie wykonać sprawdzenie.

Macierz odwrotna odgrywa zasadniczą rolę w szacowaniu parametrów strukturalnych modeli ekonometrycznych. Dlatego też przed przystąpieniem do rozważań szacowania parametrów modeli należy dobrze opanować tę część algebry liniowej.

Prawdziwe są następujące własności macierzy odwrotnej:

$$\text{a) } (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1},$$

$$\text{b) } (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T,$$

$$\text{c) } (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$

$$\text{d) } \det \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{B}},$$

$$\text{e) } (k\mathbf{B})^{-1} = \frac{1}{k} \mathbf{B}^{-1}, \quad \text{gdy } k \neq 0.$$

Sprawdzimy je dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},$$

Ad . a)

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 31 \\ 14 & 18 \end{bmatrix},$$

$$\det (\mathbf{AB}) = 24 \cdot 18 - 31 \cdot 14 = 432 - 434 = -2,$$

$$C_{11} = 18, \quad C_{12} = -14, \quad C_{21} = -31, \quad C_{22} = 24,$$

$$\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{AB})^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 18 & -31 \\ -14 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & \frac{31}{2} \\ 7 & -12 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & \frac{31}{2} \\ 7 & -12 \end{bmatrix}.$$

Macierze $(\mathbf{AB})^{-1}$ i $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ są macierzami identycznymi.

Ad. b)

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{A}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{A}^{-1})^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix},$$

czyli $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

Ad. c)

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{A}^{-1} = 1, \quad (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Otrzymaliśmy równość $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

Ad. d)

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{5}{2} \cdot 3 = -\frac{1}{2};$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 10 - 12 = -2$$

$$\text{Zatem } \det \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{B}}$$

Ad. e)

$$\mathbf{C} = k\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2k & 3k \\ 4k & 5k \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{C} = 10k^2 - 12k^2 = -2k^2.$$

$$C_{11} = 5k, \quad C_{12} = -4k, \quad C_{21} = -3k, \quad C_{22} = 2k,$$

$$\mathbf{C}^{-1} = (k\mathbf{B})^{-1} = -\frac{1}{2k^2} \begin{bmatrix} 5k & -3k \\ -4k & 2k \end{bmatrix} = -\frac{1}{2k} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Zatem } (k\mathbf{B})^{-1} = -\frac{1}{k} \mathbf{B}^{-1}.$$

Rozdział 2

MODELE EKONOMETRYCZNE

2.1. ZADANIA EKONOMETRII

Arthut S. Goldberger¹ we wstępie do pierwszego rozdziału „Teorii ekonometrii” napisał, że głównym celem ekonometrii jest wyposażenie teorii ekonomii w treść empiryczną. Stwierdzenie to jest najważniejszym zadaniem ekonometrii. Ekonometria dysponuje szeroką skalą metod umożliwiających osiągnięcie tego celu. Ekonomia stawia hipotezy, które można w sposób stosunkowo łatwy potwierdzić lub podważyć za pomocą ekonometrii. Poznanie tych właściwości ekonometrii daje możliwość wykorzystania jej w praktyce gospodarczej, czyli w polityce gospodarczej, która bazuje na potwierdzonych prawach ekonomicznych. To potwierdzenie, zarówno co do kierunku zależności jak i jej siły jest możliwe dzięki ekonometrii.

Obszerny program nauczania ekonometrii obejmuje teorię ekonomii, matematykę, statystykę matematyczną, metodologię badań społecznych i analizę empiryczną. W każdym przypadku, przy tworzeniu modeli odzwierciedlających zależności czy prawa ekonomiczne należy pamiętać o cechach i specyfice praw ekonomicznych². Istnieje bowiem zasadnicza różnica pomiędzy statystyką matematyczną a ekonometrią analizującą zależności ekonomiczne, które nie są wynikiem powtarzalnych kontrolowanych eksperymentów.

Podstawowym narzędziem wykorzystywanym w ekonometrii – w ąskim jej znaczeniu – jest model ekonometryczny. Model przedstawia wybrane zależności ekonomiczne w formie zwykle wielu równań, chociaż czasami również w postaci jednego równania. Celem analizowanego równania jest przedstawienie w uproszczonej formie tych zależności, które są najbardziej istotne i pozwalają najlepiej poznać rodzaj i siłę zależności.

¹ A. S. Goldberger: *Teoria ekonometrii*, PWE, Warszawa, 1975, s. 15.

² O prawach ekonomicznych traktuje na przykład praca: *Makro i Mikroekonomia. Podstawowe problemy*, red. S. Marciniak, PWN, Warszawa, 1999, s. 19 i następne.

Model, będąc zasadniczym uproszczeniem zależności, musi uwzględniać zależności pozostałe a także elementy probabilistyczne. Praktyczna ekonomia - realizowana poprzez konkretne działania ludzi, na przykład poprzez nabywanie dóbr, nie musi pokrywać się z teorią ekonomii. Decyzje ludzi zawierają elementy działań, które mogą nie odpowiadać poznany prawom ekonomicznym. Możemy stwierdzić, że rzeczywistość ekonomiczna jest w znacznym stopniu losowa. Taka też jest rzeczywistość badana przez modele ekonometryczne. Stąd znaczenie takich nauk jak rachunek prawdopodobieństwa czy statystyka matematyczna.

Model ekonometryczny to jedno lub wiele równań, z których co najmniej jedno zawiera składnik losowy. Mówiąc o modelu ekonometrycznym jakiegoś zjawiska, myślimy o uproszczonym opisie rzeczywistości. Uproszczenie oznacza, że w modelu nie występują wszystkie zmienne, jakie w rzeczywistości opisują analizowane zjawisko. Rzeczywistość jest znacznie bardziej skomplikowana, niż składający się z wielu równań model. Dlatego też, w przypadku ekonometrii mamy do czynienia z modelem zawierającym równania stochastyczne i z tego powodu będziemy do modeli ekonometrycznych stosować narzędzia statystyki matematycznej a nie po prostu rozwiązywać układ równań matematycznych.

2.2. POSTAĆ MODELU

Przedmiotem tej części książki jest ekonometryczny model jednorównaniowy. Jest to model, który wyjaśnia zachowanie jednej zmiennej, zwanej zmienną objaśnianą lub zależną. Większość modeli wykorzystywanych praktycznie do analiz ma jednak więcej niż jedno równań. Wówczas mamy do czynienia z modelem wielorównaniowym.

Ogólna postać modelu wielorównaniowego wygląda następująco: gdzie:

$$Y_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{2t} + \dots + \alpha_{m-1} Y_{mt} + \alpha_{m+1} X_{1t} + \alpha_{m+2} X_{2t} + \dots + \alpha_{m+k} X_{kt} + \varepsilon_{1t}$$

$$Y_{2t} = \beta_0 + \beta_1 Y_{1t} + \dots + \beta_{m-1} Y_{mt} + \beta_{m+1} X_{1t} + \beta_{m+2} X_{2t} + \dots + \beta_{m+k} X_{kt} + \varepsilon_{2t}$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$Y_{mt} = \omega_0 + \omega_1 Y_{1t} + \dots + \omega_{m-1} Y_{m-1,t} + \omega_{m+1} X_{1t} + \omega_{m+2} X_{2t} + \dots + \omega_{m+k} X_{kt} + \varepsilon_{mt}$$

Y_{it} – zmienna objaśniana w i-tym równaniu, $i = 1, \dots, m$,

$\alpha_k, \beta_k, \dots, \omega_0$ – są parametrami strukturalnymi modelu,

X_{jt} – j-ta zmienna objaśniająca, $k = 1, \dots, k$.

ε_{it} – jest składnikiem losowym w i – tym równaniu, $i = 1, \dots, m$.

Zgodnie z wcześniejszymi uwagami w dalszej części zajmować się będziemy przede wszystkim modelami jednorównaniowymi. Na przykładzie takiego modelu zostanie pokazany sposób szacowania parametrów strukturalnych, który ze względu na sposób postępowania nazywany jest Klasyczną Metodą Najmniejszych Kwadratów [KMNK]. Jednakże, ze względu na częstość występowania modeli wielorównaniowych konieczna jest znajomość również tych modeli. Dlatego też w dalszej części opisane zostaną niektóre metody szacowania takich modeli. W celu dokładnego poznania metod szacowania modeli wielorównaniowych czy też modeli jednorównaniowych, ale nieliniowych należy sięgnąć po bardziej zaawansowane pozycje książkowe.

Poniżej na przykładzie modelu wielorównaniowego pokazane zostaną sposoby podziału modeli a również dokonana zostanie analiza występujących w nich zmiennych.

PRZYKŁAD 2.1. Zaproponuj postać trzyparametrowego modelu ekonometrycznego opisującego popyt na samochody.

Taki model, uwzględniający zarówno popyt na samochody, jak i badający związane z tym popytem czynniki z rynku paliwowego, przedstawiają poniższe równania:

$$(1) \quad PS_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_t + \alpha_2 D_{t-1} + \alpha_3 CB_t + \varepsilon_{1t}$$

$$(2) \quad PB_t = \beta_0 + \beta_1 [PS_t + PS_{t-1}] + \beta_2 D_t + \varepsilon_{2t}$$

$$(3) \quad CB_t = \gamma_0 + \gamma_1 PS_t + \varepsilon_{3t}$$

gdzie:

PS_t – efektywny popyt na samochody (faktyczna sprzedaż samochodów) w roku t ,

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – parametry strukturalne w równaniu pierwszym,

D_t – średni dochód do dyspozycji gospodarstw domowych w roku t ,

D_{t-1} – średni dochód do dyspozycji gospodarstw domowych w roku $t-1$,

CB_t – cena benzyny w roku t ,

ε_{1t} – składnik losowy w pierwszym równaniu,

PB_t – efektywny popyt na benzynę (faktyczna sprzedaż benzyny w tonach) w roku t ,

$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ – parametry strukturalne w równaniu drugim,

$PS_t + PS_{t-1}$ – łączna sprzedaż samochodów w latach t oraz $t-1$,

ε_{2t} – składnik losowy w drugim równaniu,

γ_0, γ_1 – parametry strukturalne w trzecim równaniu.

Przedstawiona postać modelu wielorównaniowego nazywana jest postacią strukturalną. Innym sposobem prezentacji modelu, którą można uzyskać po przekształceniach, jest postać zredukowana. Postacie te różnią się przede wszystkim równoczesnym występowaniem tych samych zmiennych, jako objaśnianych w jednych równaniach i objaśniających w innych równaniach.

Łatwo widać, że w modelu pokazanym w przykładzie 2.1. wśród zmiennych objaśniających znajdują się zmienne, które w innych równaniach są zmiennymi objaśnianymi. Przykładem właśnie takiej sytuacji jest zmienna CB_t , która jest zmienną objaśnianą przez równanie (3). Jednocześnie ta zmienna objaśnia kształtowanie się w pierwszym równaniu zmiennej PS_t . Z tego względu konieczne jest poznanie i stosowanie jednolitego nazewnictwa zmiennych.

2.3. KLASYFIKACJA ZMIENNYCH WYSTĘPUJĄCYCH W MODELU

W modelach ekonometrycznych występują dwa podstawowe zbiory zmiennych. Są to zbiory obejmujące:

A – zmienne objaśniane,

B – zmienne objaśniające.

Zmienne objaśniane są opisywane przez model. To zachowanie tych zmiennych jest badane. Zależy nam na poznaniu kształtowania się w przyszłości właśnie zmiennych objaśnianych przez model. W odróżnieniu od nich występują zmienne, które opisują zachowanie się zmiennych objaśnianych. Dlatego też nazywane są zmiennymi objaśniającymi kształtowanie się zmiennej objaśnianej. Zwykle nie są to zbiory rozłączne. Widać to również na Przykładzie 2.1. Zmienna CB_t należy równocześnie do zbioru A i B.

Inna klasyfikacja, definiująca rozłączne zbiory zmiennych występujących w modelach ekonometrycznych wyróżnia dwa zbiory:

C – zmienne endogeniczne,

D – zmienne egzogeniczne.

Te dwa pojęcia pozwalają wyróżnić zmienne, które należą w modelu tylko do jednego zbioru. Możemy napisać, że zmienne endogeniczne

zawierają bieżące³ i opóźnione zmienne objaśniane przez model, podczas gdy zmienne egzogeniczne to bieżące i opóźnione zmienne nie objaśniane przez model, czyli mające cechę objaśniającą a nie będące wyjaśnianymi przez model. Jak łatwo widać, żadna ze zmiennych nie może być nieobjaśnianą i objaśnianą jednocześnie. Stąd stwierdzenie, że zbiory te muszą być rozłączne.

W przypadku modeli wielorównaniowych zmienne dzielimy dodatkowo na zbiory:

E – zmienne łącznie współzależne,

F – zmienne z góry ustalone.

Zmienne łącznie współzależne to wymienione wcześniej zmienne endogeniczne ale nieopóźnione, czyli mające subskrypt t . Natomiast zmienne z góry ustalone to zmienne egzogeniczne i opóźnione zmienne endogeniczne. Podobnie łatwo stwierdzić, że również te zbiory są rozłączne.

PRZYKŁAD 2.2. Znajdź zbiory A, B, C, D, E, F dla zmiennych występujących w modelu z Przykładu 2.1.

Zgodnie z podanymi powyżej definicjami możemy zapisać, że w modelu pokazanym w Przykładzie 2.1 występują następujące zbiory zmiennych:

$$A = \{PS_t, PB_t, CB_t\},$$

$$B = \{D_t, D_{t-1}, CB_t, PS_t + PS_{t-1}, PS_t\},$$

$$C = \{PS_t, PB_t, CB_t\},$$

$$D = \{D_t, D_{t-1}, PS_t + PS_{t-1}\},$$

$$E = \{PS_t, PB_t, CB_t\},$$

$$F = \{D_t, D_{t-1}, PS_t + PS_{t-1}\}.$$

Jak widać w przykładzie tym nie występują opóźnione zmienne objaśniane, co oznacza, że zbiory A, C i E zawierają te same elementy. Podobnie równe są zbiory D i F.

2.4. KLASYFIKACJA MODELI EKONOMETRYCZNYCH

Klasyfikacji modeli można dokonać na wiele sposobów. Stosowane kryteria pozwalają na wybór metod estymacji modeli. Oznacza to,

³ Zmienne bieżące występują w czasie t , co zapisujemy przykładowo jako CB_t . Zmienne opóźnione występują w okresach wcześniejszych. Na przykład są to dane dla danego zjawiska, występujące przed rokiem, co zapisujemy w postaci subskryptu CB_{t-1} i odpowiednio np. zmienna CB_{t-1} reprezentuje wartość tej zmiennej przed dwoma laty.

że wśród modeli stosowanych w praktyce konieczne jest określenie modelu, przeprowadzenie właściwego postępowania, którego celem jest przygotowanie do estymacji, i wreszcie wykorzystanie właściwej metody estymacji modelu. W niektórych przypadkach konieczne jest przeprowadzenie dodatkowych testów, które pomogą dostosować dane do modelu, bądź też zweryfikują słuszność stosowanej metody estymacji.

Ta książka, mając charakter podręcznika wstępnego do nauki ekonometrii, ogranicza się jedynie do modeli jednorównaniowych i liniowych. Pominięte zostaną sposoby estymacji modeli wielorównaniowych. Również większość testów nie zostanie tu nawet wspomniana. Dla czytelnika chcącego zgłębić wybrane zagadnienia nie powinno być problemu ze znalezieniem prac bardziej zaawansowanych⁴.

Zwykle modele ekonometryczne klasyfikujemy ze względu na pięć kryteriów. Poniżej przedstawiono opis tych kryteriów wraz z ilustrującymi je przykładami.

KRYTERIUM 1. Liczba równań w modelu.

- modele jednorównaniowe, opisujące zachowanie się jednej zmiennej,
- modele wielorównaniowe, w których każde równanie objaśnia jedną zmienną.

PRZYKŁAD 2.3. Dokonaj klasyfikacji modelu występującego w przykładzie 2.1. Zaproponuj postać jednorównaniowego modelu ekonometrycznego opisującego popyt na samochody.

W przykładzie 2.1. występują 3 równania. Opisują one kształtowanie się trzech zmiennych objaśnianych:

PS_t – efektywny popyt na samochody (faktyczna sprzedaż samochodów) w roku t ,

CB_t – cena benzyny w roku t ,

PB_t – efektywny popyt na benzynę (faktyczna sprzedaż benzyny w tonach) w roku t .

Model ten łączy w sobie znany z teorii ekonomii efekt popytu na do-

⁴ W tej pracy nie będziemy analizować już metod doboru zmiennych do modelu. Jest to bardzo ważna część nauki, pozwala bowiem na zwiększenie informacji, której dostarcza model. W tym przypadku warto sięgnąć do prac profesora Z. Hellwiga. Również praca zbiorowa M. Gruszczyńskiego, M. Kolupy, E. Leśniewskiej, G. Napiórkowskiej: *Miary zgodności, metody doboru zmiennych, problemy współliniowości*, PWN, Warszawa, 1979, zawiera opis metod doboru zmiennych do modelu. Ponadto w pracy tej pokazane są spotykane w modelach problemy współliniowości i metody eliminacji tego zjawiska.

bra komplementarne⁵. Opisuje całość zjawiska, uwzględniając fakt, że popyt na samochody jest zależny od cen benzyny.

Model prosty, jednorównaniowy, badający popyt na samochody przedstawić można za pomocą modelu:

$$PS_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_t + \alpha_2 D_{t-1} + \alpha_3 CB_t + \varepsilon_{1t}$$

gdzie⁶ zmienne mają to samo znaczenie, jakie nadano im w przykładzie 2.1.

KRYTERIUM 2. Postać analityczna modelu.

- modele liniowe, w których wszystkie zależności modelu są liniowe,
- modele nieliniowe, w których chociaż jedna zależność modelu jest nieliniowa.

PRZYKŁAD 2.1. pokazuje model liniowy, to jest taki model, w którym równania są sumą iloczynów parametrów strukturalnych i zmiennych. Zmienne nie występują w postaci funkcji trygonometrycznych, wykładniczych czy innych funkcji nieliniowych. Jest to zatem model liniowy. Nieliniowość może dotyczyć zarówno parametrów jak i zmiennych.

PRZYKŁAD 2.4. Podaj przykład modelu nieliniowego opisującego proces produkcji.

W literaturze polskiej jest szereg pozycji, w których znaleźć można przykłady funkcji opisujących proces produkcji i jego efekty. Funkcje takie zwane są właśnie funkcjami produkcji. Najpopularniejszą jest funkcja produkcji typu Cobb-Douglasa. Została opisana po raz pierwszy przed prawie stu laty⁷. Postać funkcji typu Cobb-Douglasa reprezentuje poniższe równanie:

$$Q = e^{\alpha} P^{\beta} C^{\gamma} e^{\delta t} e^{\varepsilon}$$

gdzie zmienną objaśnianą Q jest wartość produkcji a zmienne objaśniające oznaczają odpowiednio: P – wielkość nakładów pracy żywej, C – wartość nakładów pracy uprzedmiotowionej, t – czas. Składnik losowy ε występuje również w formie funkcji wykładniczej o podstawie e . Parametry α , β , γ są odpowiednio: stałą regresji, elastycznością produkcji względem nakładów pracy żywej oraz względem nakładów pra-

⁵ Dobra występujące razem (samochód i benzyna, aparat cyfrowy i pamięć) w odróżnieniu od dóbr substytucyjnych (masło i margaryna).

⁶ W ekonometrii występuje również analiza równań „wyjętych”, czyli analizowane jest jedno równanie wyjęte z modelu wielorównaniowego.

⁷ Cobb C.W., Douglas P.H.: *A Theory of Production*, American Economic Review Supplement, 1928. Szczegółowy opis tej funkcji znajduje się w pracy: Dunajewski H.: *Struktura i stosowność funkcji produkcji typu Cobb-Douglasa*, Ekonomista, 1962, Nr 3.

cy uprzedmiotowionej. Parametr δ wyraża postęp techniczny neutralny⁸.

Łatwo widać na podanym przykładzie, że taka funkcja produkcji jest nieliniowa zarówno ze względu na parametry jak i zmienne.

KRYTERIUM 3. Uwzględnienie czynnika czasu w modelu.

- modele statyczne, które nie uwzględniają czynnika czasu,
- modele dynamiczne, w których uwzględnia się czynnik czasu w postaci zmiennej czasowej (trend, tendencja rozwojowa) lub opóźnienia zmiennej objaśnianej (autoregresja). Występowanie tego czynnika chociaż w jednym równaniu określa model jako dynamiczny.

PRZYKŁAD 2.5. Model wielorównaniowy z przykładu 2.1 jest modelem statycznym. Nie zawiera czynnika czasu, jak również żadna zmienna objaśniająca nie jest opóźnioną (z subskrypsem $t-1$) zmienną objaśnianą. Podaj przykład modelu dynamicznego.

W teorii ekonomii znany jest model Harroda-Domara⁹. Pokazuje on wzrost gospodarczy jako funkcję dokonywanych inwestycji oraz istniejącego w gospodarce majątku produkcyjnego.

$$M_t = \alpha_0 M_{t-1} + \alpha_1 I_t + \varepsilon_{1t}$$

$$D_t = \beta_0 M_t + \varepsilon_{2t}$$

$$D_t = C_t + I_t$$

gdzie: Gdzie D_t – reprezentuje produkt krajowy brutto w roku t , M_t oraz M_{t-1} – to wartość majątku trwałego odpowiednio w roku t i w roku poprzednim ($t-1$), C_t – konsumpcja, I_t – inwestycje.

Model ten jest modelem dynamicznym, w którym majątek produkcyjny w roku bieżącym jest opisywany tymże majątkiem w roku poprzednim. Jednocześnie majątek określa wielkość produktu krajowego brutto. Trzecie równanie stanowi tożsamość, stwierdzając, że wytworzone w gospodarce wartości są albo konsumowane albo inwestowane.

KRYTERIUM 4. Charakter powiązań pomiędzy zmienną objaśnianą a zmiennymi objaśniającymi.

- modele przyczynowo-opisowe,
- modele symptomatyczne,
- tożsamości.

⁸ W rozumieniu Hicksa. Por. Allen R.G.D.: *Teoria makroekonomiczna*, PWN, Warszawa, 1975, s. 247 i następne.

⁹ Jest to jeden z pierwszych modeli ekonomicznych dotyczących stabilnego wzrostu, uzależniając go od decyzji inwestycyjnych.

Kryterium to bazuje na powiązaniach pomiędzy zmiennymi modelu. Można zauważyć, że modele budujemy bazując na teorii ekonomii. W pierwszym kroku powinno się rozpoznać teorię, postawić hipotezę i na jej podstawie zbudować odpowiednie równanie. Przykładem takiego równania jest pierwsze i drugie równanie w przykładzie 2.5. Pierwsze i drugie równanie określają zmienną objaśniającą jako skutek przyczyny, jaką jest kształtowanie się zmiennej objaśnianej. Wysokość inwestycji określa wartość majątku produkcyjnego. Występuje zatem wyrażenie przyczyna (inwestycje) i skutek (wzrost majątku produkcyjnego).

Trzecie równanie jest tożsamością, przedstawiającą ekonomiczny pewnik. Nie można zrobić z zarobioną złotówką nic innego jak ją konsumować (zguba jest formą konsumpcji) lub zaoszczędzić.

Równania, w których rolę zmiennych objaśniających pełnią zmienne skorelowane z odpowiednimi zmiennymi objaśnianymi ale nie wyrażające źródeł zmienności zmiennych objaśnianych, nazywamy równaniami symptomatycznymi. Można sobie wyobrazić, że wysokość dochodów hoteli nad morzem opisywać będziemy w zależności od średniej temperatury w miesiącach wakacyjnych i od czasu (model dynamiczny, zawierający tendencję rozwojową). Taki model pokazuje następujący przykład:

PRZYKŁAD 2.6. Napisz jednorównaniowy, symptomatyczny model opisujący przychody z usług hotelarskich nad morzem.

$$S_t = \alpha_0 S_{t-1} + \alpha_1 G_t + \alpha_2 T + \varepsilon_t$$

gdzie: S_t reprezentuje przychody z usług hotelarskich w roku t , S_{t-1} jest opóźnioną zmienną objaśnianą, reprezentującą przyzwyczajenia turystów (część osób jeździ systematycznie do tych samych ośrodków), G_t jest średnią temperaturą w lipcu i sierpniu w roku t , T jest tendencją rozwojową, przyjmującą wartość kolejnej liczby naturalnej ($T = 1, 2, 3, \dots, n$).

Model powyższy jest symptomatycznym modelem jednorównaniowym, gdyż pokazuje przychody jako funkcję temperatury. Zmienna ta oczywiście nie wpływa na przychody w sposób bezpośredni. Jednakże decyzje urlopowe są podejmowane w oparciu o przewidywaną temperaturę. Zmienna ta jest skorelowana z prawdziwą zmienną, mającą wpływ na przychody z usług hotelarskich (rosnąca temperatura nie podnosi przychodów z usług hotelarskich, jednak sprzyja przyjazdowi nad morze większej liczby turystów).

zostałych miejscach macierzy. Parametry strukturalne modeli prostych szacujemy w drodze estymacji pojedynczej (każde równanie oddzielnie) za pomocą Klasycznej Metody Najmniejszych Kwadratów [KMNK].

Model rekurencyjny będzie miał macierz B w formie macierzy trójkątnej (elementy na głównej przekątnej są jedynkami a nad tą przekątną występują również elementy różne od zera, podczas gdy pod nią występują same zera, lub odwrotnie zera są nad diagonalną w pod nią są również elementy różne od zera). W przypadku modeli rekurencyjnych stosujemy do estymacji również Klasyczną Metodę Najmniejszych Kwadratów. Postępowanie rozpoczynamy od równania, w którym nie występują jako zmienne objaśniające inne zmienne objaśniane. Estymacja parametrów strukturalnych tego równania KMNK pozwala na wyliczenie wartości teoretycznych zmiennej objaśnianej. Następnie te właśnie wartości teoretyczne (wyliczone na podstawie modelu) są wstawiane w miejsce wartości rzeczywistych (obserwowanych). W ten sposób spełnione są warunki (opisane w dalszej części) wymagane dla KMNK.

Model współzależny ma macierz B w postaci, której nie można sprowadzić przez zamianę wierszy do macierzy jednostkowej ani macierzy trójkątnej. Do szacowania takich modeli wykorzystywane są: Pośrednia Metoda Najmniejszych Kwadratów, Podwójna Metoda Najmniejszych Kwadratów a także metody estymacji łącznej.

Pośrednia Metoda Najmniejszych Kwadratów [PMNK] polega na wyznaczeniu ocen parametrów postaci strukturalnej – czyli postaci modelu, który został zaproponowany do szacowania – przy wykorzystaniu uprzednio oszacowanych parametrów postaci zredukowanej. Oznacza to, że model w postaci (strukturalnej) macierzowej:

$$BY - \Gamma X = \epsilon$$

mnożymy lewostronnie przez macierz odwrotną do macierzy B, czyli B^{-1} . Dzięki temu uzyskamy zredukowaną postać modelu:

$$B^{-1}BY = B^{-1}\Gamma X + B^{-1}\epsilon .$$

Czyli oczywiście po skorzystaniu z właściwości macierzy odwrotnej:

$$Y = B^{-1}\Gamma X + B^{-1}\epsilon .$$

Postać zredukowana to oczywiście model prosty. Co oznacza, że do niej możemy zastosować KMNK. Jak łatwo widać zasób informacji wynikający z tej postaci (zredukowanej) może być niewystarczający do uzyskania oszacowań oryginalnego modelu w postaci strukturalnej.

Dlatego do PMNK wymagana jest jednoznaczna identyfikowalność modelu. Oznacza to, że jedynie do estymacji parametrów część modeli, spełniających warunek jednoznacznej identyfikowalności może być użyta PMNK¹¹.

W przypadku braku jednoznacznej identyfikowalności nie jest możliwe szacowanie parametrów strukturalnych modeli współzależnych przy wykorzystaniu postaci zredukowanej. W takim przypadku należy zastosować Dwustopniową Metodę Najmniejszych Kwadratów [2MNK].

2MNK polega na dwukrotnym zastosowaniu metody klasycznej:

- w pierwszym kroku szacujemy parametry strukturalne postaci zredukowanej:

$$(Y = B^{-1}GX + B^{-1}C)$$

i na tej podstawie wyliczamy wartości teoretyczne zmiennych łącznie współzależnych,

- w drugim kroku szacujemy parametry postaci strukturalnej, z tym, że zamiast prawdziwych obserwacji dokonanych na zmiennych łącznie współzależnych (które pełnią w równaniu funkcję zmiennych objaśnianych) używamy wartości teoretycznych tych zmiennych, obliczone w pierwszym kroku.

PRZYKŁAD 2.7. Dokonaj klasyfikacji modelu z przykładu 2.1.

Model z przykładu 2.1 określa popyt na samochody. Dla przypomnienia powtórzmy zapis tego modelu:

$$(1) \quad PS_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_t + \alpha_2 D_{t-1} + \alpha_3 CB_t + \varepsilon_{1t}$$

$$(2) \quad PB_t = \beta_0 + \beta_1 [PS_t + PS_{t-1}] + \beta_2 D_t + \varepsilon_{2t}$$

$$(3) \quad CB_t = \gamma_0 + \gamma_1 PS_t + \varepsilon_{3t}$$

Model jest wielorównaniowym (kryterium 1) liniowym (kryterium 2) statycznym (kryterium 3) modelem przyczynowo-skutkowym (kryterium 4). W celu określenia modelu z punktu widzenia kryterium 5 konieczne jest wyznaczenie macierzy B stojącej przy wektorze zmiennych łącznie współzależnych.

Dlatego też wykonamy następujące działania:

- a) zostawimy po prawej stronie znaku równości wyłącznie składniki losowe:

$$(1) \quad PS_t - \alpha_0 - \alpha_1 D_t - \alpha_2 D_{t-1} - \alpha_3 CB_t = \varepsilon_{1t}$$

¹¹ Szerzej o szacowaniu parametrów za pomocą PMNK pisze: B. Borkowski w pracy *Ekonometria*, PWN, 2003 na s. 236 i następnych. Tamże znaleźć można przykład wykorzystania PMNK i 2MNK.

$$(2) \quad PB_t - \beta_0 - \beta_1 [PS_t + PS_{t-1}] - \beta_2 D_t = \varepsilon_{2t}$$

$$(3) \quad CB_t - \gamma_0 - \gamma_1 PS_t = \varepsilon_{3t}$$

b) pogrupujemy oddzielnie zmienne łącznie współzależne¹² i oddzielnie z góry ustalone

$$(1) \quad PS_t - \alpha_3 CB_t - \alpha_0 - \alpha_1 D_t - \alpha_2 D_{t-1} = \varepsilon_{1t}$$

$$(2) \quad PB_t - \beta_0 - \beta_1 [PS_t + PS_{t-1}] - \beta_2 D_t = \varepsilon_{2t}$$

$$(3) \quad CB_t - \gamma_1 PS_t - \gamma_0 = \varepsilon_{3t}$$

c) zapiszmy model w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PS_t \\ PB_t \\ CB_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha^0 & -\alpha^1 & -\alpha^2 & 0 \\ -\beta^0 & -\beta^2 & 0 & -\beta^1 \\ -\gamma^0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ D_t \\ D_{t-1} \\ PS_t - PS_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix}$$

d) zwróćmy uwagę na macierz B, stojącą przy zmiennych łącznie współzależnych. Jest to macierz różna od macierzy jednostkowej i macierzy trójkątnej. Zarówno pod jak i nad diagonalną znajdują się elementy różne od zera. Model jest współzależny.

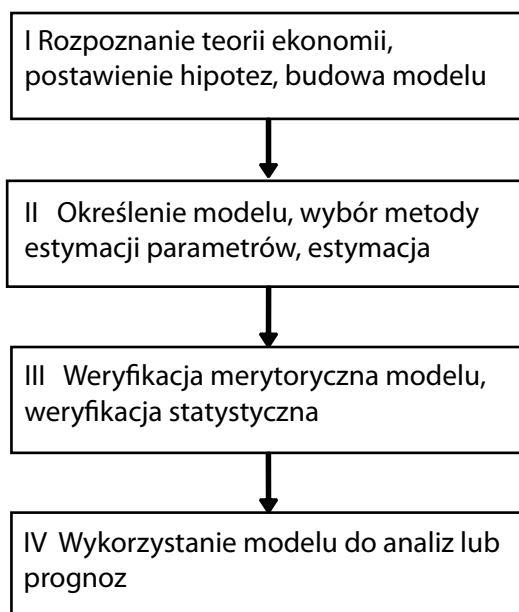
2.5. METODA EKONOMETRII

Zadaniem ekonometrii jest dostarczenie wiedzy o sile zjawisk ekonomicznych oraz dokonanie symulacji bądź znalezienie prognoz dotyczących przyszłych stanów natury. W celu uzyskania tego wyniku należy jednak przejść dosyć długotrwały proces zbierania danych, budowania modelu, jego estymacji, weryfikacji i dopiero po pozytywnym zakończeniu tego etapu można wykorzystywać model do wyciągania wniosków czy liczenia prognoz. Właśnie te kroki pokazuje zamieszczony schemat postępowania ekonometrycznego.

Zgodnie z pokazanym schematem pierwszym krokiem jest budowa modelu. Dokonuje się tego w oparciu o wiedzę odnośnie praw ekonomicznych lub hipotez stawianych na podstawie obserwacji zjawisk. Tak jak napisane zostało wcześniej, istnieje wiele metod doboru zmiennych do modelu. Zasadniczym celem jest uzyskanie modelu, który nie mając niepożądanych właściwości wyjaśniać może znaczną część wahań zmiennej objaśnianej przez model. Dlatego główne zadanie polega nie tylko na próbie przedstawienia w modelu wszystkich hipotez, ale

¹² Warto w tym miejscu zauważyć, że zmienna $PS_t + PS_{t-1}$ reprezentuje przyrost zmiennej objaśnianej w roku t. Nie jest zatem przyrost objaśniany w żadnym równaniu.

Schemat 2.1. Metoda ekonometrii



również eliminację możliwych błędów wynikających z wybranego zbioru zmiennych. Najogólniej w doborze zmiennych objaśniających chodzi o to, by każda z nich była silnie skorelowana ze zmienną objaśnianą, ale jednocześnie korelacje pomiędzy zmiennymi objaśniającymi były jak najmniejsze.

Następnym krokiem, często niedocenianym, jest zebranie informacji o kształtowaniu się poszczególnych zmiennych w różnych latach. Najczęściej wykorzystuje się właśnie dane w postaci szeregów czasowych, to jest wartości zmiennych w różnych (w kolejnych) miesiącach, kwartałach czy latach. Często właśnie następują zmiany w sposobie liczenia danego zjawiska. Wprowadza się zmiany w definicji, uzupełnia. Powoduje to, że dane nie są wystarczająco dobre do wykorzystania ich do estymacji modelu. Przykładowo badanie poboru wody przez gospodarstwo domowe zależy może od tego, jak prowadzi się tę czynność. Czy w bloku mieszkalnym jest jeden licznik a zużycie rozpisuje się proporcjonalnie na liczbę członków gospodarstwa domowego, czy też odczytuje się dane z licznika zainstalowanego w każdym mieszkaniu. Najczęściej właśnie założenie liczników powoduje odczyty świadczące o znacznym spadku zużycia wody, co raczej wskazuje na błędy w pomiarze a nie na faktycznie mniejszym zużyciu wody.

Obok szeregów czasowych wykorzystują jeszcze dane przekrojowo czasowe. Pochodzą one z pewnej zbiorowości charakteryzującej się tą samą cechą w określonym czasie. W tym przypadku do analizy zużycia wody można wziąć wszystkie gospodarstwa domowe w danym bloku. Nie musi zatem występować szereg czasowy polegający na wielomiesięcznych obserwacjach jednego gospodarstwa domowego. Podobnie można wykorzystać dane przekrojowe jak i szereg czasowy¹³.

Obok takich danych w modelach można wykorzystywać zmienne, które przyjmują wartość jeden, gdy zmienna ma określoną cechę, lub zero, gdy zmienna danej cechy nie posiada. Zmienne takie określamy mianem zerojedynkowych. Często w modelach gospodarczych w ten sposób wyróżnia się dokonane zasadnicze zmiany. Można wprowadzić zmienną zerojedynkową w sytuacji badania zjawisk gospodarczych w sie wprowadzenia podatku VAT. W miesiącach, przed wprowadzeniem podatku zmienna przyjmuje wartość zero. Od dnia wprowadzenia podatku VAT ta sama zmienna przyjmuje wartość jeden. W ten sposób eliminuje się wpływ takiego znacznego czynnika, który występuje tylko w części badanego okresu.

Dokonanie klasyfikacji modelu i wybór metody estymacji parametrów strukturalnych jest kolejnym krokiem w postępowaniu ekonometrycznym. W tej książce ograniczymy się jedynie do Klasycznej Metody Najmniejszych Kwadratów stosowanej do liniowych modeli jednorodnaniowych. Jednakże czytelnik wie, że w przypadku innych modeli należy (być może) skorzystać z innych metod estymacji parametrów strukturalnych.

Oszacowanie parametrów rozpoczyna proces weryfikacji modelu. Najpierw dokonywana jest weryfikacja merytoryczna. Badane są wielkości parametrów i ich interpretacja. W ten sposób analizowana jest słuszność uzyskanych oszacowań. Oszacowania te nie zależą jedynie od metody estymacji czy od danych. Równie ważne są związki pomiędzy zmiennymi objaśniającymi. Mogą one powodować duże błędy w szacunku parametrów. Dlatego weryfikacja merytoryczna jest pierwszym krokiem do akceptacji modelu.

Kolejnym krokiem jest analiza koincydencji. Zostanie ona opisana w następnej części. Po uzyskaniu pozytywnego wyniku z analizy koincydencji następuje weryfikacja dobroci modelu. Badając współczynnik determinacji staramy się ocenić, jak dużo badanego zjawiska można

¹³ Sposoby postępowania w obu przypadkach są dokładnie opisane w literaturze przedmiotu.

wyjaśnić przy pomocy uproszczonego narzędzia, jakim jest model ekonometryczny.

Kolejnym krokiem weryfikacji jest badanie istotności zmiennych. Do tego wykorzystywany jest rozkład t-Studenta. Tablica rozkładu została zamieszczona na końcu niniejszej książki. Obok opisanego w dalszej części badania statystycznej istotności zmiennych objaśniających stosować można wiele innych testów. Dotyczyć one mogą badania liniowości, autokorelacji składnika losowego, homoskedastyczności tegoż składnika, badania normalności rozkładu składnika losowego. Bardziej zaawansowane podręczniki do nauki ekonometrii zawierają opis tych i innych tekstów¹⁴.

2.6. ESTYMACJA PARAMETRÓW STRUKTURALNYCH JEDNORÓWNIOWEGO MODELU EKONOMETRYCZNEGO

Osoby kończące studia często zaczynają szukać własnego mieszkania. Biorą pod uwagę zarówno swoje preferencje, ale także uwarunkowania budownictwa mieszkaniowego i własne możliwości finansowe. W pierwszej kolejności stają się klientami agencji nieruchomości, które żądają od nich wielu danych odnośnie oczekiwań w stosunku do mieszkania oraz kwoty, którą mogą dysponować przy zakupie mieszkania.

Zwykle nikomu nie nastrecza większych kłopotów udzielenie odpowiedzi. Również określenie zmiennych, które mogą mieć wpływ na cenę mieszkania jest stosunkowo proste. Ważne w tym przypadku są między innymi takie dane jak:

- dzielnica mieszkaniowa,
- powierzchnia mieszkania,
- liczba pokoi,
- piętro, na którym mieszkanie się znajduje,
- metraż kuchni,
- funkcjonująca w bloku winda,
- otoczenie mieszkania (zieleń, przemysł, inne bloki, itp.),
- kierunek, na który wychodzą okna mieszkania,
- wysokość mieszkania,

¹⁴Niektóre z nich można znaleźć w pracy zbiorowej pod redakcją naukową M. Podgórskiej: *Ekonometria*, SGH. Wznowienia tego popularnego podręcznika dla studentów studiów ekonomicznych dokonywane są prawie corocznie.

- rok budowy,
- metoda budowy (wielka płyta, cegła tradycyjna, nowe technologie)
- odległość od stacji metra.

Łatwo sobie wyobrazić, że cena jest uwarunkowana ponadto grą popytu i podaży, gdyż każde mieszkanie podlega prawom rynku. Istotną zatem zmienną jest zmienna zerojedynekowa świadcząca o przewadze popytu (przybiera wartość 1) lub podaży (przybiera wartość 0). Można zatem zaproponować postać modelu ekonometrycznego, na podstawie którego wyliczona zostanie cena mieszkania, będącego przedmiotem marzeń.

PRZYKŁAD 2.8. Przedstaw postać jednorównaniowego, liniowego modelu ekonometrycznego wyjaśniającego kształtowanie się cen mieszkań w Śródmieściu Warszawy.

Uwzględniając część zmiennych wyliczonych wcześniej model może mieć postać:

$$CM_t = \alpha_0 + \alpha_1 PM_t + \alpha_2 LP_t + \alpha_3 PK_t + \alpha_4 PP_t + \varepsilon_t$$

gdzie:

CM_t – cena mieszkania w PLN (t oznacza numer transakcji, mówimy cena t-tego mieszkania),

PM_t – powierzchnia mieszkania w metrach kwadratowych,

LP_t – liczba pokoi w mieszkaniu,

PK_t – powierzchnia kuchni (w m²),

PP_t – zmienna zerojedynekowa, przyjmująca wartość 1, gdy zauważalna jest przewaga popytu na mieszkania oraz 0, gdy przeważa podaż mieszkań,

ε_t – składnik losowy reprezentujący wszystkie pozostałe zmienne.

W dalszej części, po poznaniu estymatora uzyskanego Klasyczną Metodą Najmniejszych Kwadratów, pokazany został przykład uwzględniający niektóre z podanych zmiennych, oszacowany na przykładzie danych z jednej z gazet, publikujących dane z rynku nieruchomości.

Najogólniej jednorównaniowy liniowy model ekonometryczny można przedstawić równaniem:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k + \varepsilon,$$

gdzie:

Y – wartość zmiennej objaśnianej w roku (transakcji) t ,

X_j , dla $j = 1, 2, \dots, k$, obserwacje na zmiennych objaśniających,

ε – składnik losowy,

α_j , dla $j = 0, 1, \dots, k$, poszukiwane parametry strukturalne modelu.

Łatwo widzieć, że wraz ze stałą (wektor jedynek stojących przy α_0) łącznie $k+1$ zmiennych objaśnia zmienną Y . Zarówno zmienne objaśniające, jak i zmienna objaśniana mogą być obserwowane i możemy poznać ich rzeczywistą realizację. Na przykład w transakcji nabywania mieszkania znamy zarówno cenę jak i powierzchnię mieszkania, piętro, liczbę pokoi itp. Właśnie te dane nazywamy obserwacjami zmiennych (wartości rzeczywiste). Celem postępowania ekonometrycznego jest oszacowanie wartości parametrów strukturalnych modelu właśnie na podstawie zebranych informacji statystycznych, dotyczących wartości zmiennych występujących w modelu.

Oznacza to, że dysponujemy szeregami czasowymi obserwacji na wszystkich zmiennych modelu. Każda zmienna została zaobserwowana n razy (n musi być znacznie większe od k). Mogą to być dane w postaci szeregu czasowego (np. plony z danego pola w kolejnych latach) lub w przypadku danych przekrojowych n oznacza liczbę obserwowanych obiektów (np. transakcji mieszkaniami).

Kolejne obserwacje na zmiennych oznaczamy subskryptem t . To znaczy:

y_t – jest wartością obserwowaną (rzeczywistą) zmiennej objaśnianej Y w okresie lub transakcji t ,

X_{jt} – wartość obserwowana (rzeczywista) zmiennej objaśniającej X_j w okresie lub transakcji t ,

$t = 1, 2, \dots, n$.

Zebrane informacje przedstawia się w ujęciu wektorowym (macierzowym) w sposób następujący:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ - \\ - \\ y_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad \text{– wektor obserwacji dokonanych} \\ \text{na zmiennej objaśnianej}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & x_{kn} \end{bmatrix}_{n \times (k+1)} \quad \begin{array}{l} \text{macierz} \\ \text{-- zaobserwowanych wartości} \\ \text{zmiennych objaśniających} \end{array}$$

Przykładowo x_{12} oznacza obserwację dokonaną na zmiennej x_1 w roku (transakcji) 2. Oznacza to, że po uwzględnieniu znanych wartości poszczególnych zmiennych równanie przyjmuje postać układu n równań liniowych (gdyż t przyjmuje wartości od 1 do n):

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t} + \dots + \alpha_k x_{kt} + \varepsilon_t,$$

Podobnie można zapisać:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ - \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad \text{-- wektor składnika losowego,}$$

oraz

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ - \\ - \\ \alpha_k \end{bmatrix}_{(k+1) \times 1} \quad \text{-- wektor szukanych parametrów strukturalnych modelu.}$$

W takim przypadku, korzystając z zapisu macierzowego możemy jednorównaniowy model zapisać w postaci:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\alpha + \varepsilon$$

Tę postać modelu będziemy wykorzystywać w dalszych obliczeniach wielokrotnie. Poniżej zostanie ona wykorzystana do znalezienia estymatora parametrów strukturalnych modelu za pomocą Klasycznej Metody Najmniejszych Kwadratów [KMNK]. Warto przypomnieć z nauki statystyki¹⁵, że pożądanymi właściwościami estymatorów są:

- zgodność, to jest zbieżność stochastycznie do α ;

¹⁵ Por. np. J. Józwiak, J. Podgórski: *Statystyka od podstaw*, PWE, 2001, s. 202 i następne. Opisane tam są zarówno pojęcie, jak i podstawowe własności estymatorów.

- nieobciążoność, czyli wartość oczekiwana jest równa wartości prawdziwej $E(a) = \alpha$;
 - efektywność, czyli minimalizowanie wariancji estymatora¹⁶;
- W celu znalezienia estymatora przyjmiemy następujące założenia¹⁷:

Założenie 1. Zmienne objaśniające X_j są nielosowe i nieskorelowane ze składnikiem losowym,

Założenie 2. Rząd macierzy X równa się $k+1$, co zapisujemy $rz(X) = k + 1$

Założenie 3. Liczba obserwacji jest znacznie większa od liczby zmiennych objaśniających, co można zapisać: $n \gg k + 1$,

Założenie 4. Wartość oczekiwana składnika losowego wynosi zero $E(\varepsilon) = 0$,

Założenie 5. Składnik losowy ma stałą i skończoną wariancję a ponadto jest w poszczególnych okresach (transakcjach) niezależny

$$D^2(\varepsilon) = E(\varepsilon \varepsilon^T) = \sigma^2 I, \sigma^2 < \infty.$$

W niektórych przypadkach zakłada się, że składnik losowy w każdym z okresów ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 0 i skończonej, stałej wariancji σ^2 oraz poszczególne okresy są niezależne. Przy uwzględnieniu powyższych założeń można sformułować twierdzenie określające Klasyczną Metodę Najmniejszych Kwadratów, jako metodę dającą najlepsze estymatory.

Twierdzenie (Gaussa – Markowa)

Estymator $\mathbf{a}^{18}$ wektora parametrów $\mathbf{\alpha}$ jednorównaniowego ekonometrycznego modelu wyznaczony przy pomocy KMNK jest estymatorem: liniowym, nieobciążonym, zgodnym i najefektywniejszym w klasie liniowych i nieobciążonych estymatorów.

Zgodnie z wcześniejszym zapisem zajmiemy się szukaniem za pomocą metody najmniejszych kwadratów, postaci estymatora parametrów jednorównaniowego modelu ekonometrycznego:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

¹⁶ Zgodnie z definicją estymator, który ma w zbiorze wszystkich nieobciążonych estymatorów najmniejszą wariancję jest nazywany najefektywniejszym. Por. także s. 207.

¹⁷ Dotyczą one stosowalności metody najmniejszych kwadratów.

¹⁸ Oszacowania będziemy przedstawiać literami łacińskimi, podczas gdy wartości rzeczywiste parametrów literami greckimi.

Wartości teoretyczne uzyskane na podstawie modelu będziemy w odróżnieniu od wartości rzeczywistych, zaobserwowanych, oznaczać znakiem „dach”. Teoretyczne wartości po oszacowaniu modelu uzyskamy na podstawie:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\mathbf{a}.$$

Oczywiście w postaci szczegółowej, określającej wartość teoretyczną zmiennej dla danych z okresu t , taką wartość teoretyczną reprezentuje równanie:

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + \dots + a_k x_{kt}.$$

Różnicę pomiędzy wartością rzeczywistą a wartością teoretyczną uzyskaną na podstawie modelu określać będziemy jako reszta. Oznacza to, że resztę dla okresu t możemy zapisać:

$$e_t = y_t - \hat{y}_t,$$

a reszt takich jest oczywiście n ($t = 1, 2, \dots, n$). Są one równe kolejnym różnicom elementów poniższych wektorów:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \hat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{y}_n \end{bmatrix}$$

Czyli wektor reszt można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix}$$

Po podstawieniu w miejsce $\hat{\mathbf{Y}}$ postaci modelu uzyskamy zapis:

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{a}.$$

Metoda najmniejszych kwadratów polega na wyznaczeniu takiego wektora oszacowań a wektora parametrów $\mathbf{a}$, dla którego wielkość będąca sumą kwadratów wszystkich elementów wektora reszt ($\mathbf{e}^T \mathbf{e}$) osiąga minimum. Interesuje nas zatem minimalizacja wartości:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a})$$

co po wymnożeniu daje postać¹⁹:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} + \mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{a}$$

mającą swe minimum wówczas, gdy pierwsza pochodna jest równa zeru, czyli

$$\partial(\mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} + \mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{a}) / \partial \mathbf{a} = 0,$$

co oznacza równość:

$$-2\mathbf{X}^T \mathbf{y} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{a} = 0,$$

a po dalszych przekształceniach uzyskujemy układ w postaci:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{a} = \mathbf{X}^T \mathbf{y}.$$

Na podstawie przyjętego założenia odnośnie rzędu macierzy $\mathbf{X}$ możemy stwierdzić, że macierz $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ jest macierzą kwadratową, symetryczną stopnia $k + 1$. Zatem macierz ta jest nieosobliwa. Oznacza to, że poszukiwany estymator ma postać:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

Macierz drugich pochodnych cząstkowych powyższej funkcji względem $\mathbf{a}$ jest równa:

$$\partial^2(\mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} + \mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{a}) / \partial \mathbf{a}^2 = 2\mathbf{X}^T \mathbf{X}$$

co oznacza, że jest ona dodatnio określona a zatem jest spełniony warunek osiągania minimum lokalnego w punkcie $\mathbf{a}$. Wektor $\mathbf{a}$ jest estymatorem liniowym.

PRZYKŁAD 2.9. Oszacuj parametry strukturalne modelu ekonometrycznego dla agencji nieruchomości, która dokonuje pośrednictwa w sprzedaży mieszkań w Śródmieściu Warszawy. Obliczeń dokonaj na podstawie danych pokazanych w tabeli.

¹⁹ Należy pamiętać, że wielkość ta jest skalar, co oznacza, że $\mathbf{y}^T \mathbf{X} \mathbf{a}$ jest równe $\mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y}$

Tabela 2.1. Dane z rynku nieruchomości w Warszawie

Numer transakcji	Cena za mieszkanie	Powierzchnia mieszkania w m ²	Liczba pokoi
1	780 000	85	6
2	550 000	55	3
3	800 000	80	4
4	745 000	70	4
5	615 000	65	4
6	485 000	55	2
7	820 000	80	5
8	900 000	100	3
9	550 000	65	4
10	680 000	85	2

Do oszacowania parametrów strukturalnych wykorzystamy estymator uzyskany Klasyczną Metodą Najmniejszych Kwadratów. Zgodnie z pokazaną powyżej postacią estymatora należy wyliczyć wektor parametrów, korzystając z wzoru: $\mathbf{a} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$. Model będzie miał postać:

$$CM_t = \alpha_0 + \alpha_1 PM_t + \alpha_2 LP_t + \varepsilon_t,$$

gdzie:

CM_t – cena w transakcji t ,

PM_t – powierzchnia mieszkania w transakcji t

LP_t – liczba pokoi w mieszkaniu z transakcji t ,

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ – parametry strukturalne

ε_t – składnik losowy.

Warto jest zauważyć, że poszczególne macierze obserwacji wyglądają następująco:

- wektor obserwacji na zmiennej objaśnianej (cena mieszkania):

$$CM = \begin{bmatrix} 780\,000 \\ 550\,000 \\ 800\,000 \\ 745\,000 \\ 615\,000 \\ 485\,000 \\ 820\,000 \\ 900\,000 \\ 550\,000 \\ 680\,000 \end{bmatrix}$$

- macierz obserwacji na zmiennych objaśniających (jako pierwsza występuje kolumna jedynek, która reprezentuje stałą, następnie metraż i liczba pokoi)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 85 & 6 \\ 1 & 55 & 3 \\ 1 & 80 & 4 \\ 1 & 70 & 4 \\ 1 & 65 & 4 \\ 1 & 55 & 2 \\ 1 & 80 & 5 \\ 1 & 100 & 3 \\ 1 & 65 & 4 \\ 1 & 85 & 2 \end{bmatrix}$$

Na podstawie powyższych macierzy, zgodnie z postacią estymatora dokonano następujących obliczeń:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 10 & 740 & 37 \\ 740 & 56\,650 & 2\,775 \\ 37 & 2\,775 & 151 \end{bmatrix}$$

oraz

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 3,37628560 & -0,03585839 & -0,16831487 \\ -0,03585839 & 0,00055775 & -0,00146361 \\ -0,16831487 & -0,00146361 & 0,07476266 \end{bmatrix}$$

i

$$\mathbf{X}^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 6\,925\,000 \\ 528\,500\,000 \\ 26\,300\,000 \end{bmatrix}$$

Na podstawie powyższych danych uzyskano oszacowanie:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2\,940 \\ 7\,960 \\ 27\,161 \end{bmatrix}$$

Co oznacza, że model, po oszacowaniu parametrów ma postać:

$$\hat{\mathbf{C}}\mathbf{M}_t = 2\,940 + 7\,960\mathbf{P}\mathbf{M}_t + 27\,161\mathbf{L}\mathbf{P}_t.$$

Interpretacja poszczególnych parametrów strukturalnych w powyższym modelu nie powinna nastręczać większych kłopotów. Łatwo bowiem zauważyć, zmieniając o jednostkę wartość zmiennej objaśniającej,

jakie to przyniesie efekty dla zmiennej objaśnianej. Intuicyjnie można zauważyć, że parametr 7 960 związany jest z ceną za jeden metr kwadratowy mieszkania. Oczywiście nie jest to średnia cena, bo w przykładzie średnia cena jednego metra kwadratowego mieszkania z podanych dziesięciu transakcji wynosi 9 358 zł. Wynik taki uzyska się dzieląc sumę cen zapłaconych we wszystkich transakcjach przez liczbę metrów, jakie miały wszystkie mieszkania. Dane te są zawarte w macierzy $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ oraz wektorze $\mathbf{X}^T\mathbf{y}$.

Uważny czytelnik zwrócił uwagę na to, że mnożenie dowolnej kolumny przez wiersz złożony z jedynek (pierwszy wiersz transponowanej macierzy $\mathbf{X}$) to po prostu dodawanie elementów tejże kolumny. Dlatego w macierzy $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ pierwszy wiersz jest liczbą transakcji, drugi wiersz sumą powierzchni (metrów kwadratowych) wszystkich sprzedanych mieszkań, to jest 740 a ostatni element to suma pokoi w tych mieszkaniach (37). Podobnie średnie mieszkanie kosztowało 692 500 zł. Wynik ten uzyskać można dzieląc łączną wartość cen, którą reprezentuje pierwszy element wektora $\mathbf{X}^T\mathbf{y}$ przez liczbę transakcji. Liczba 6 925 000 zł to suma (ponownie mnożenie przez wektor jedynek) wszystkich transakcji, czyli przez wartości pokazane w wektorze $\mathbf{y}$. Sumując można napisać, że średnie mieszkanie kosztowało 692 500 zł i miało 74 metry kwadratowe. Średnio za jeden metr zapłacono właśnie 9 358 zł.

Co zatem oznacza oszacowanie parametru stojącego przy zmiennej reprezentującej powierzchnię (7 960 zł)? Model ekonometryczny daje inną interpretację, niż wielkości statystyczne. Kwota ta mówi, ile należy zapłacić za dodatkowy metr mieszkania, które ma znaną liczbę pokoi. Jeżeli zatem ktoś chciałby mieszkanie z trzema pokojami o powierzchni 70 metrów kwadratowych to musiałby wyliczyć teoretyczną wartość tego mieszkania z wzoru:

$$\hat{\mathbf{C}}\mathbf{M}_t = 2\,940 + 7\,960 \mathbf{P}\mathbf{M}_t + 27\,161 \mathbf{L}\mathbf{P}_t$$

podstawiając w miejsce $\mathbf{P}\mathbf{M}_t$ 70 a w miejsce $\mathbf{L}\mathbf{P}_t$ liczbę 3. Daje to wartość 641 646 zł. Gdyby jednak mieszkanie miało o jeden metr więcej to jego teoretyczna cena byłaby właśnie o 7 960 zł wyższa.

Podobnie interpretować można parametr 27 161 zł. Stoi on przy zmiennej reprezentującej liczbę pokoi. Oznacza to, że za mieszkanie o danej powierzchni, ale z większą o jeden liczbą pokoi zapłacić jesteśmy gotowi o 27 161 zł więcej. Wyliczamy to, wstawiając do powyższego wzoru liczbę 70 w miejsce $\mathbf{P}\mathbf{M}_t$ oraz 4 (zamiast dotychczasowej 3)

w miejsce LP₁. Daje to wartość 668 807 zł, czyli dokładnie 27 161 zł więcej, niż w przypadku trzech pokoi²⁰.

2.7. WERYFIKACJA JEDNORÓWNIOWEGO MODELU EKONOMETRYCZNEGO

Weryfikację modelu ekonometrycznego, po oszacowaniu jego parametrów dokonujemy w kilku krokach. Na początku dokonujemy weryfikacji merytorycznej, następnie analizujemy koincydentność modelu, w dalszej kolejności badamy za pomocą współczynnika determinacji stopień wyjaśniania przez model wahań zmiennej objaśnianej, a ostatnim krokiem będzie testowanie statystyczne modelu²¹, a właściwie jedynie badanie istotności zmiennych objaśniających za pomocą testu t-Studenta. Obok tych elementów weryfikacji, model może zostać poddany kilku testom. Najczęściej stosowany jest test Durбина-Watsona, którego zadaniem jest wykrycie autokorelacji składnika losowego modelu ekonometrycznego. Test ten opisany jest w ostatniej części niniejszego rozdziału. Kolejnym testowanym założeniem jest losowość rozkładu składnika losowego. Test ten ma na celu zweryfikowanie hipotezy dotyczącej prawidłowości postaci analitycznej modelu (liniowości). W tym przypadku wykorzystuje się test liczby serii²². Dopiero weryfikacja modelu tym testem umożliwia potwierdzenie hipotezy mówiącej, że postać liniowa modelu została wybrana właściwie. Innym testem, który weryfikuje zakładaną normalność rozkładu składnika losowego jest test Shapiro-Wilka.

2.7.1. Weryfikacja merytoryczna

Weryfikacja merytoryczna oszacowanych parametrów strukturalnych modelu obejmuje zwykle ich interpretację i analizę. Weryfikacja ma na celu potwierdzenie przyjętych hipotez. Trudno byłoby uznać za poprawne oszacowanie modelu określającego cenę mieszkań, jeżeli wartość parametru przy zmiennej „powierzchnia mieszkania” byłaby ujemna. Wówczas wzrost powierzchni musiałby oznaczać zmniejszenie ceny mieszkania. Jest to oczywisty absurd. Podobnie wielkość oszaco-

²⁰ Interpretację parametru stojącego przy wektorze jedynek (wyraz wolny) pozostawiam czytelnikom.

²¹ Opisane szczegółowo postępowanie weryfikujące poprawność modelu nie wyczerpuje całego zestawu działań w weryfikacji modelu. Obok wspomnianych działań można badać na przykład efekt katalizy, homoskedastyczność składnika losowego i inne. Te testy wykraczają poza zakres materiału na studiach, na których ekonometria nie jest podstawowym przedmiotem. Czytelnik chcący poznać te metody ma możliwość sięgnąć chociażby do popularnego podręcznika wydawanego przez Oficynę Wydawniczą Szkoły Głównej Handlowej: S. Dorosiewicz i inni: *Ekonometria*, SGH, Warszawa.

²² Więcej na ten temat np. w pracy: Borkowski B. i inni: *Ekonometria*, s. 78 i dalsze.

wanego parametru musi odpowiadać wiedzy o danym zjawisku. Równie trudno byłoby przyjąć, że parametr stojący przy zmiennej reprezentującej powierzchnię mieszkania (PM_i) może wynosić na przykład 100 zł czy też 25 000 zł.

Interpretacja parametrów, pokazana wcześniej w przykładzie 2.9, oznacza analizę danego parametru przy pozostałych wielkościach niezmiennych. Można zatem napisać, że parametr a_j , stojący przy zmiennej objaśniającej X_j , oznacza, o ile przeciętnie wzrośnie (gdy $a_j > 0$) albo spadnie (gdy $a_j < 0$) wartość zmiennej objaśnianej Y , gdy wartość zmiennej X_j wzrośnie o jednostkę. Analizy dokonujemy przy niezmiennych wartościach pozostałych zmiennych objaśniających.

2.7.2. Badanie koïncydencji

Czasami trudno jest określić, jaki jest wpływ danej zmiennej na zmienną objaśnianą. W takim przypadku weryfikacja polega na zbadaniu w modelu zachowania się danej zmiennej. Analizie poddany jest zatem znak parametru strukturalnego w porównaniu do znaku współczynnika korelacji zmiennej objaśnianej i zmiennej objaśniającej, przy której stoi badany znak.

Mówimy, że model jest koïncydentny, jeśli dla każdej zmiennej objaśniającej modelu spełniony jest warunek²³:

$$\text{sgn}(r_i) = \text{sgn}(a_i)$$

gdzie a_i jest oszacowaniem parametru strukturalnego α_i , występującego przy zmiennej objaśniającej X_i , natomiast r_i jest współczynnikiem korelacji pomiędzy zmienną X_i a zmienną objaśnianą Y .

Koïncydentny model ma znaki przed wszystkimi parametrami takie same, jakie występują przy współczynnikach korelacji zmiennych objaśniających ze zmienną objaśnianą²⁴. Jeżeli model nie jest koïncydentny to należy zmienić zestaw zmiennych objaśniających. Przyczyn braku koïncydencji może być wiele (np. niewłaściwa postać analityczna modelu), bądź występująca współliniowość. Zmiana zmiennych pozwala zwykle na uzyskanie modelu koïncydentnego.

Oczywiście nie prowadzi się badania zgodności znaku przy stałej, gdyż współczynnik korelacji stałej i zmiennej objaśnianej jest równy zero. Dlatego też badanie dotyczy k zmiennych objaśniających.

²³ Sgn (łac. *signum*) oznacza znak, czyli interesuje nas znak przed parametrem (minus, plus).

²⁴ Ta część, czyli liczenie współczynników korelacji czy kowariancji, jest znana z zajęć statystyki i dlatego w tej pracy pominiemy wzory na liczenie tych współczynników.

W przypadku modelu opisanego w przykładzie 2.9 współczynniki korelacji zmiennej objaśniającej zarówno ze zmienną „metraż” jak i „liczba pokoi” są dodatnie. Model jest zatem koincydentny.

2.7.3. Współczynnik determinacji R^2

Metoda najmniejszych kwadratów ma na celu znalezienie takich parametrów strukturalnych modelu, które minimalizują sumę kwadratów różnic pomiędzy wartościami teoretycznymi a empirycznymi. Oznacza to, że w przypadku układu współrzędnych znajdujemy wartości ustalające prostą. Na prostej leżą wartości teoretyczne. Różnice pomiędzy miejscami faktycznie zaobserwowanymi a miejscami na prostej, podniesione do kwadratu i zsumowane dają minimalną wartość, gdy stosujemy właśnie estymator KMNK.

Dla przestrzeni wyższego rzędu znajdujemy zamiast prostej właśnie płaszczyznę (hiperpłaszczyznę w przestrzeni R^{k+1}). Dobry model będzie płasował wartości teoretyczne blisko wartości empirycznych. Dokładność dopasowania hiperpłaszczyzny do danych empirycznych mierzy się właśnie współczynnikiem determinacji.

PRZYKŁAD 2.10. Znajdź sumę kwadratów różnic dla modelu opisanego w przykładzie 2.9.

Zgodnie z danymi uzyskanymi jako wynik zastosowania KMNK do danych z przykładu 2.9 uzyskano model:

$$\hat{C}M_t = 2\,940 + 7\,960 PM_t + 27\,161 LP_t$$

Poniżej przedstawiono w kolejnych kolumnach: y – dane rzeczywiste, $\hat{y}$ – dane teoretyczne, wyliczone poprzez wstawienie faktycznych wartości zmiennych objaśniających.

Tablica 2.2. Wyliczenia dokonane w celu wyliczenia sumy kwadratów różnic reszt

	y	$\hat{y}$	$y_t - \hat{y}_t$	$(y_t - \hat{y}_t)^2$
1	780 000	842 534	-62 534	3 910 454 058
2	550 000	522 241	27 759	770 567 527
3	800 000	748 410	51 590	2 661 496 673
4	745 000	668 807	76 193	5 805 394 106
5	615 000	629 005	-14 005	196 144 014
6	485 000	495 080	-10 080	101 608 473
7	820 000	775 571	44 429	1 973 926 832
8	900 000	880 456	19 544	381 952 752
9	550 000	629 005	-79 005	6 241 812 526
10	680 000	733 890	-53 890	2 904 178 145
		suma	0	24 947 535 107

W każdej transakcji wystąpiły odchylenia od wartości modelowych. Różnice pomiędzy wartością rzeczywistą (zapłaconą) a teoretyczną (modelową) wskazują, że inne względy miały wpływ na cenę mieszkania. Niektóre z mieszkań były kupione znacznie drożej, niż wynosi cena teoretyczna, podczas gdy inne kupowane były poniżej wartości teoretycznej. Jak łatwo widać, w przypadku występowania wyrazu wolnego, suma różnic pomiędzy tymi wartościami wynosi zero. Łącznie tyle przeplacono za wszystkie mieszkania, ile niedopłacono. Zgodnie z postępowaniem KMNK minimalizujemy sumę kwadratów różnic. Była by ona równa zero tylko wówczas, gdy model odpowiadał w pełni rzeczywistości.

Miarą dokładności dopasowania wartości teoretycznych do danych empirycznych jest współczynnik określający, jaka część zmienności zmiennej objaśnianej jest wyjaśniona przez model. Ten współczynnik nazywamy współczynnikiem determinacji R^2 , który może zostać wyliczony przy pomocy jednego z następujących wzorów (są one równoważne):

$$\begin{aligned}
 R^2 &= \frac{\sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - \bar{y})^2}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2} = \\
 &= 1 - \frac{e^T e}{y^T y - n\bar{y}^2} = 1 - \frac{y^T y - a^T X^T y}{y^T y - n\bar{y}^2}
 \end{aligned}$$

Dla liniowego modelu ekonometrycznego z wyrazem wolnym wartość współczynnika R^2 należy do przedziału $[0,1]$. Wielkość $R^2 = 1$ oznacza, że model wyjaśnia w 100% wszystkie wahania zmiennej objaśnianej, natomiast R^2 bliskie zero oznacza, że przydatność modelu jest niewielka lub żadna. Zwykle, dla modeli oszacowanych na podstawie dużych prób, R^2 nie powinno być niższe niż 0,9. Wówczas mówimy o bardzo dobrym modelu, wyjaśniającym ponad 90% wahań zmiennej objaśnianej.

PRZYKŁAD 2.11. Wylicz współczynnik determinacji dla modelu z przykładu 2.9.

Zastosujmy do wyliczenia współczynnika determinacji wyrażenie:

$$R^2 = 1 - \frac{e^T e}{y^T y - n\bar{y}^2}$$

Z poprzedniego przykładu znana była wartość $e^T e$. Jest ona równa 24 947 535 107. Należy ją podzielić przez wartość wykazaną w mianowniku. Pierwszą wielkością jest suma kwadratów wartości rzeczywistych. Pokazuje to następująca tablica:

	y_t	y_t^2
1	780 000	608 400 000 000
2	550 000	302 500 000 000
3	800 000	640 000 000 000
4	745 000	555 025 000 000
5	615 000	378 225 000 000
6	485 000	235 225 000 000
7	820 000	672 400 000 000
8	900 000	810 000 000 000
9	550 000	302 500 000 000
10	680 000	462 400 000 000
		4 966 675 000 000

Z poprzednich obliczeń wiemy, że średnie y (cena średniego mieszkania) wynosiło 692 500 zł. Kwadrat tej liczby wynosi 479 556 250 000. Oczywiście n równa się 10 (liczbie transakcji). Mamy zatem obliczenie: $R^2 = 1 - (24\,947\,535\,107) / (4\,966\,675\,000\,000 - 10 \cdot 479\,556\,250\,000)$, co oznacza, że $R^2 = 0,854$. Można zatem stwierdzić, że model został bardzo dobrze oszacowany, gdyż wahania cen mieszkań aż w 85% wyjaśniane są za pomocą dwóch zmiennych: metrażu mieszkania i liczby pokoi w tymże mieszkaniu. Identyczne wyniki uzyskamy obliczając R^2 z innych postaci tego wzoru.

Podana powyżej interpretacja współczynnika determinacji może być stosowana, tylko wtedy, gdy zależność pomiędzy zmienną objaśnianą a zmiennymi objaśniającymi jest liniowa a parametry modelu oszacowano metodą najmniejszych kwadratów oraz model ekonometryczny zawiera wyraz wolny. W przypadku braku wyrazu wolnego zwykle suma reszt nie jest równa zero.

2.7.4. Weryfikacja statystyczna jednorównaniowego modelu ekonometrycznego

Czwartym krokiem w weryfikacji modelu ekonometrycznego jest jego weryfikacja statystyczna. Ze względu na zakres niniejszego podręcznika zajmiemy się jedynie liczeniem standardowych błędów szacowanych parametrów strukturalnych oraz istotnością zmiennych w oparciu o test t-Studenta.

Podczas weryfikacji statystycznej głównym przedmiotem zainteresowania jest wektor reszt

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix},$$

który w macierzowym zapisie przedstawiany jest wzorem:

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{a}.$$

Jednym z najważniejszych elementów weryfikacji statystycznej modelu jest analiza błędów oszacowań parametrów. Do tego wykorzystujemy estymator wariancji σ^2 składnika losowego modelu. Estymator wariancji σ^2 przedstawiany jest jako S^2 i można go przedstawić wzorem:

$$S^2 = \frac{e^T e}{n - (k + 1)} = \frac{y^T y - a^T X^T y}{n - (k + 1)}$$

Zastosowanie tego wzoru jest niezbędne do obliczeń istotności zmiennych.

Łatwo jest pokazać, że nieobciążonym i zgodnym estymatorem macierzy wariancji-kowariancji estymatora $\mathbf{a}$ (to znaczy $\text{VAR}(\mathbf{a})$) parametrów modelu jest:

$$\hat{D}^2(\mathbf{a}) = S^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = [d_{ij}]_{(k+1) \times (k+1)}$$

gdyż $\text{VAR}(\mathbf{a})$ jest równa wartości oczekiwanej wyrażenia:

$$E(\mathbf{a} - \boldsymbol{\alpha})(\mathbf{a} - \boldsymbol{\alpha})^T.$$

Zajmijmy się częścią jednym z dwóch elementów $\mathbf{a} - \boldsymbol{\alpha}$

$$\mathbf{a} - \boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} - \boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{X} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\alpha}$$

co po wymnożeniu równa się:

$$= \boldsymbol{\alpha} + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}$$

a po wstawieniu do wzoru na wariancję dostajemy:

$$\text{VAR}(\mathbf{a}) = E[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}][(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}]^T$$

co po skorzystaniu z własności wartości oczekiwanej (wartością oczekiwaną stałej jest stała) oraz skróceniu macierzy, pozwala zapisać wzór na wariancję w postaci:

$$\text{VAR}(\mathbf{a}) = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}.$$

Widać zatem, że zasadnicze znaczenie ma w tym przypadku estymator wariancji składnika losowego oraz macierz $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ a właściwie jej diagonalne elementy, gdyż obliczając iloczyny S^2 i elementów diagonalnych tej macierzy otrzymamy oceny wariancji estymatorów poszczególnych parametrów modelu ekonometrycznego. W przypadku badania istotności korzystamy z oceny odchylenia standardowego estymatora tego parametru (pierwiastek z obliczonej wariancji). To odchylenie standardowe nosi nazwę średniego błędu szacunku parametru α_j .

Odchylenie standardowe służy do testowania istotności zmiennych objaśniających. Jeśli prawdziwe jest założenie o normalności rozkładu składnika losowego modelu, wtedy można badać istotność zmiennych objaśniających. Do zbadania istotności zmiennych wykorzystujemy test t-Studenta. Jest to statystyczny test istotności. Testowana jest hipoteza

zerowa $H_0: \alpha_j = 0$ przy hipotezie alternatywnej $H_1: \alpha_j \neq 0$. Zmienna losowa $t = |a_j|/S_{a_j}$ ma rozkład t-Studenta z $n - (k + 1)$ stopniami swobody²⁵.

Hipoteza H_0 oznacza brak wpływu zmiennej X_j na Y . Nawet jeżeli parametr ma dużą wartość nominalnie, to w przypadku, gdy jego udział w średnim błędzie szacunku jest niższy od wartości krytycznej rozkładu t-Studenta, należy przyjąć hipotezę H_0 . Mówimy wówczas, że zmienna X_j jest nieistotna dla rozpatrywanego modelu..

PRZYKŁAD 2.12. Sprawdź istotność zmiennych objaśniających w modelu przedstawionym w przykładzie 2.9.

Zgodnie z podanym opisem znajdujemy trzy statystyki, odpowiednio dla α_0 , α_1 oraz α_2 . W pierwszym kroku należy wyliczyć estymator wariancji składnika losowego. Zgodnie z wzorem

$$S^2 = \frac{e^T e}{n - (k + 1)} = \frac{y^T y - a^T X^T y}{n - (k + 1)}$$

jest on równy $S^2 = 3\,563\,933\,587$, gdyż jest to wartość $24\,947\,535\,107$ dzielona przez liczbę stopni swobody $(10 - 3)$. Warto przypomnieć macierz $(X^T X)^{-1}$

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 3,37628560 & -0,03585839 & -0,16831487 \\ -0,03585839 & 0,00055775 & -0,00146361 \\ -0,16831487 & -0,00146361 & 0,07476266 \end{bmatrix}$$

Obliczamy pierwiastki z kolejnych iloczynów $3\,563\,933\,587$ i elementów diagonalnych tej macierzy to jest elementów $d_{11} = 3,37628560$, $d_{22} = 0,00055775$ oraz $d_{33} = 0,07476266$. Wyliczone pierwiastki wynoszą odpowiednio:

$$S(a_0) = 109\,694, \quad S(a_1) = 1\,410, \quad S(a_2) = 16\,323$$

Dla przypomnienia oszacowany model miał postać:

$$\hat{C}M_t = 2\,940 + 7\,960 PM_t + 27\,161 LP_t$$

A zatem stosunek poszczególnych parametrów przez ich odchylenia standardowe (średnie błędy szacunku) daje następujące statystyki t-studenta:

$$t_0 = 0,027 \quad t_1 = 5,646 \quad t_2 = 1,664.$$

Standardowy zapis modelu ekonometrycznego wygląda następująco:

$$\hat{C}M_t = 2\,940 + 7\,960 PM_t + 27\,161 LP_t$$

(0,10) (7,37) (2,27)

²⁵ Tablice rozkładu znajdują się na końcu podręcznika.

Wartość krytyczna testu t-Studenta dla poziomu istotności 0,90 i dla 7 stopni swobody wynosi $t^* = 1,895$. Wartość wyliczonych statystyk t-Studenta dla obu zmiennych objaśniających jest większa od tej wartości krytycznej. Odrzucamy hipotezę H_0 wobec alternatywnej hipotezy H_1 co oznacza, że zmienne te są istotne na przyjętym poziomie istotności. Nie ma natomiast powodu, by za istotną przyjąć stałą. Wartość statystyki t-Studenta wynosi jedynie 0,03 i jest mniejsza od wartości krytycznej t^* .

2.7.5. Autokorelacja składnika losowego

W przypadku, gdy składnik losowy jest ze sobą skorelowany w kolejnych próbach mówimy o autokorelacji składnika losowego. W takim przypadku KMNK nie daje dobrych rezultatów, gdyż estymator $\mathbf{a}$ jest mało efektywny i wariancje estymatorów poszczególnych parametrów strukturalnych są bardzo duże. W takim przypadku należy usunąć efekt korelacji składnika losowego.

Zgodnie z założeniem braku korelacji składnika losowego, macierz wariancji-kowariancji składnika losowego jest macierzą diagonalną o postaci

$$\text{VAR}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \alpha^2 \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Jeżeli występuje autokorelacja, jako efekt stałej zależności w kolejnych próbach:

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + \eta_t, \quad |\rho| < 1$$

gdzie ρ oznacza parametr zwany współczynnikiem autokorelacji, zaś η_t jest zmienną losową spełniającą warunki wymagane od składnika losowego:

$$E(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0} \quad \text{ i } \quad D^2(\boldsymbol{\eta}) = \sigma_0^2 \mathbf{I},$$

to mówimy, że mamy do czynienia z procesem autokorelacji I rzędu Markowa. Dla takiego przypadku macierz wariancji-kowariancji będzie miała postać:

$$D^2(\varepsilon) = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \dots & \rho \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

gdyż

$$\sigma^2 = \frac{1}{1-\rho} \sigma_0^2$$

Wówczas nieobciążonym estymatorem współczynnika ρ jest:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\left(\sum_{t=2}^n e_t^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{t=2}^n e_{t-1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Podobnie do poprzedniego testu, tak i w tym przypadku badamy, czy składniki losowe rozpatrywanego modelu są związane procesem autokorelacji I rzędu Markowa. Dlatego też stawiamy hipotezę $H_0: \rho=0$. Oznacza ona brak korelacji składników losowych.

Do weryfikacji tej hipotezy stosujemy test Durбина-Watsona²⁶. Do jego stosowania wymaga się, by model ekonometryczny miał wyraz wolny, a rozkład składnika losowego był rozkładem normalnym. Dodatkowo nie powinna występować opóźniona zmienna objaśniana jako zmienna objaśniająca.

W teście Durбина-Watsona wyliczamy statystykę d z wzoru:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

Wartość statystyki d zawarta jest w przedziale $[0,4]$. Rozkład statystyki d zależy od liczby obserwacji n i liczby zmiennych objaśniających k . Dla ustalonego poziomu istotności oraz testowaniu $H_0: \rho = 0$ wobec

²⁶ Jest on stabilizowany w wielu książkach do statystyki. W tej książce, z tego względu, iż materiał wykracza poza zakres wymagany, nie został pokazany rozkład Durбина-Watsona.

alternatywnej hipotezy $H_1: \rho > 0$ podane są dwie wartości d_L i d_U wyznaczające obszary:

$d \leq d_L$	H_0 odrzucamy,
$d_L < d < d_U$	nie podejmujemy żadnej decyzji,
$d \leq d_U$	nie mamy podstaw do odrzucenia H_0 .

W przypadku testowania hipotezy $H_0: \rho = 0$ wobec alternatywnej hipotezy $H_1: \rho < 0$, podane są wielkości d_L i d_U wyznaczające obszary:

$d \geq 4 - d_L$	H_0 odrzucamy
$4 - d_U < d < 4 - d_L$	nie podejmujemy żadnej decyzji,
$d \geq 4 - d_U$	nie mamy podstaw do odrzucenia H_0 .

Stwierdzenie autokorelacji powoduje konieczność zastosowania do szacowania modelu specjalnych metod. Wykraczają one poza zakres tej pracy. Ze względu na częstość spotykania zjawiska autokorelacji w procesach gospodarczych należy jednak mieć na uwadze ten aspekt, przy szacowaniu parametrów strukturalnych modeli ekonometrycznych²⁷.

ZADANIA DO ROZDZIAŁU 2

2.1. Określ zbiory zmiennych w modelu oraz dokonaj klasyfikacji następującego modelu. Zaproponuj metodę estymacji parametrów strukturalnych modelu.

$$M_t = \alpha_0 M_{t-1} + \alpha_1 I_t + \varepsilon_{1t}$$

$$D_t = \beta_0 M_t + \beta_1 I_{t-1} + \beta_2 Z_t + \varepsilon_{2t}$$

$$Z_t = \gamma_0 + \gamma_1 M_t + \gamma_2 I_t + \varepsilon_{3t}$$

$$I_t = \delta_0 + \delta_1 M_{t-1} + \delta_2 I_{t-1} + \delta_3 D_t + \varepsilon_{4t}$$

gdzie: D – PKB, M – majątek trwały, Z – zatrudnienie, I – inwestycje

Określ zbiory:

- A – zmienne objaśniane
- B – zmienne objaśniające
- C – zmienne endogeniczne
- D – zmienne egzogeniczne
- E – Łącznie współzależne
- F – Z góry ustalone.

²⁷ Metody estymacji wymagają przekształcenia danych, które podlegają zjawisku autokorelacji i dopiero szacowaniu modelu metodą najmniejszych kwadratów w oparciu o tak dostosowane dane.

2.2. Zapisz w postaci modelu ekonometrycznego następujące, przedstawione opisowo hipotezy:

- wszystkie zależności są stochastyczne,
- inwestycje w danym roku są funkcją produktu krajowego brutto w roku poprzednim i sumy inwestycji dokonanych w dwóch poprzednich latach,
- zatrudnienie opisuje tendencja rozwojowa i zatrudnienie w roku poprzednim,
- PKB jest funkcją inwestycji w trzech poprzednich latach i zatrudnienia.

Dokonaj klasyfikacji modelu oraz określ zbiory zmiennych A, B, C, D, E, F.

2.3 Które z poniższych macierzy nie mogą być macierzami obserwacji na zmiennych objaśniających

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 8 \\ 1 & 9 & 6 \\ 1 & 16 & 7 \\ 1 & 25 & 8 \\ 1 & 36 & 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Wskazówka: dokonaj analizy przyjętych założeń do KMNK

2.4. Przedstaw wzory na elementy macierzy $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ oraz wektora $\mathbf{X}^T\mathbf{y}$ dla modeli z wyrazem wolnym i

- jedną zmienną objaśniającą
- dwiema zmiennymi objaśniającymi

2.5. Podany szereg czasowy zostanie użyty do oszacowania modelu $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ (autoregresyjnego 1 stopnia). Napisz macierz $\mathbf{X}$ oraz wektor $\mathbf{y}$, wiedząc, że obserwacje dokonane na zmiennych zostały podane w tabeli:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	1	2	4	5	5	7	8	9	8	10

Wskazówka: Zwróć uwagę na to, że brak jest obserwacji dla okresu $t=0$.

2.6. Na egzaminie z ekonometrii są trzy zadania, za które łącznie można dostać 20 punktów. Na zaliczenie wystarczy uzyskać 50% punktów możliwych plus jeden punkt. Postawiono hipotezę, że liczba punk-

tów uzyskanych zależy od czasu (liczonego w godzinach) poświęconego przez studenta na naukę przedmiotu w ostatnich dwóch tygodniach przed egzaminem. Zbadano grupę 10 osób i uzyskano wyniki pokazane w tabeli. Odpowiedz na pytanie: ile czasu powinien poświęcić student na naukę przed egzaminem, jeżeli chce dostać trójkę.

W tym celu oszacuj parametry modelu $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \varepsilon$ oraz wyciągnij wnioski

Osoba badana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Godziny nauki	10	14	10	2	4	6	6	8	16	24
Otrzymane punkty	6	10	12	0	2	6	6	8	12	18

2.7. W pewnej sieci handlowej utarg w kolejnych kwartałach podlega wahaniom sezonowym. Oszacowano na podstawie danych z okresu 2000,1 – 2005,2 model i uzyskano wyniki (wartości w milionach złotych):

$$\hat{y}_t = 56,0 - 25,0X_{1t} - 15,0X_{2t} - 5,0X_{3t} + 2,0T$$

gdzie: y_t utarg kwartalny (milionów zł), T jest tendencją rozwojową, przyjmującą wartości kolejnych liczb naturalnych (1, 2, 3 ...)

X_1, X_2, X_3 zmienne zerojedynkowe, przyjmujące wartość 1 w kwartale odpowiadającym subskryptowi przy zmiennej oraz 0 w pozostałych kwartałach.

Policz, jak będą wyglądać parametry, gdy model na podstawie tych samych danych zostanie oszacowany ale zamiast zmiennej X_{3t} zostanie użyta X_{4t} .

Ile wyniesie utarg w najbliższym kwartale?

2.8. Po oszacowaniu modelu ekonometrycznego z wyrazem wolnym i dwiema zmiennymi objaśniającymi, w którym zmienna y przyjmowała wartości: 2, 4, 4, 6, 6, 8, 8, 10, 10, 12 otrzymano $e^T e = 84$. Obliczyć i zinterpretować następujące wielkości: S^2 i R^2 .

2.9. Podczas szacowania modelu w postaci: $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1t} + \alpha_2 X_{2t} + \varepsilon_t$ otrzymano wyniki: $y^T y = 60$ oraz

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,2 & -0,4 \\ 0,0 & -0,4 & 0,8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Podać oszacowanie parametrów powyższego modelu.

Obliczyć i zinterpretować wartość współczynnika determinacji.

Z badać istotność zmiennych X_1 oraz X_2

Wskazówka: Zwróć uwagę na to, że macierz $(X^T X)^{-1}$ ma elementy równe zero, co oznacza, że możliwe jest znalezienie macierzy odwrotnej przy pomocy bloków tej macierzy.

2.10. Istnieją dwie hipotezy mówiące o wpływie ilości pieniądza (teoria ilościowa) i stopy bezrobocia na wysokość wskaźnika inflacji. Zweryfikuj obie hipotezy na podstawie danych z tabeli, wiedząc że:

I_t – stopa inflacji w miesiącu t , M_t – stopa wzrostu (w %) podaży pieniądza w miesiącu t , X_t – zmienna zerojedynkowa, przyjmująca wartość 0, gdy w miesiącu liczba bezrobotnych spadła, oraz wartość 1, gdy liczba bezrobotnych wzrosła.

T	1	2	3	4	5	6	7	8
I_t	1,02	1,01	1,01	1,02	1,01	0,99	1,02	1,01
M_t	1,1	0,9	0,9	1,2	0,9	0,9	1,1	1,2
X_t	0	1	0	1	0	1	0	1

- oszacuj liniowy model z dwiema zmiennymi objaśniającymi (bez stałej),
- jakich wniosków dostarcza model,
- ocień oszacowanie tego modelu,
- jakiej stopy inflacji można się spodziewać w miesiącu 9, jeżeli podaż pieniądza wzrośnie o 1% a bezrobocie spadnie?

Wskazówka: Zwróć uwagę na zasadność występowania wyrazu wolnego w tym modelu. Jaka byłaby jego interpretacja?

2.11. Na podstawie danych kwartalnych za okres 1990.1 – 2004.4 oszacowano parametry strukturalne modelu wielorównaniowego, otrzymując:

$$\hat{C}_t = 10 + 1,5 H_t + 2,0 R_t$$

$$\hat{H}_t = 7 + 0,5 S_{t-1} + 2,5 M_t$$

$$\hat{S}_t = 20,5 + 0,5t + 4,0Z_1 - 6,0Z_2 + 1,5Z_3$$

gdzie:

$t = 1, 2, 3, \dots$ – zmienna czasowa,

Z_1, Z_2, Z_3 – zmienne zerojedynkowe przyjmujące wartość 1 dla odpowiedniego kwartału i zera dla pozostałych.

Wyznacz prognozę wszystkich zmiennych objaśnianych na pierwszy kwartał 2005 r. wiedząc, że dla tego kwartału $M = 20$ oraz $R = 30$.

2.12. Zbudowano następujący model objaśniający kształtowanie się dochodów (y) i cen (c):

$$y_t = \alpha c_t + \beta w_t + \xi_t$$

$$c_t = \gamma y_t + \delta k_t + \zeta_t$$

gdzie:

w_t – dochody z tytułu wynagrodzeń w miesiącu t ,

k_t – koszty produkcji w miesiącu t .

Oszacowano parametry postaci zredukowanej modelu²⁸ i uzyskano następujące wyniki:

$$\hat{y}_t = 0,25 k_t + w_t$$

$$\hat{c}_t = 1,25 k_t + 1,5 w_t$$

Znajdź oceny parametrów strukturalnych tego modelu.

²⁸ Postać zredukowana, to w zapisie macierzowym postać strukturalna po wymnożeniu lewostronnie przez macierz B^{-1} .

Rozdział 3

PROGRAMOWANIE LINIOWE

3.1. WPROWADZENIE

Programowanie liniowe jest częścią szeroko rozumianych badań operacyjnych. Jest typowym zadaniem optymalizacyjnym, w którym należy znaleźć największą (najmniejszą) wartość funkcji przy spełnionych określonych warunkach. Warunki wyznaczają pewien zbiór rozwiązań dopuszczalnych a optymalizacja polega na wyborze takiego punktu w zbiorze tych rozwiązań dopuszczalnych, który daje największą (najmniejszą) wartość miernika, zwanego funkcją celu.

Z punktu widzenia matematyki będziemy mieć do czynienia z pewnym zbiorem zmiennych (n), zwanych zmiennymi decyzyjnymi, które tworzą wektor zwany decyzją. Ta decyzja jest wartościowana, czyli istnieje miernik. Można napisać, iż problem polega na wyznaczeniu maksymalnej (minimalnej) wartości funkcji

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

jaką osiąga ona na zbiorze $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ zdefiniowanymi warunkami:

$$\begin{aligned} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_i & i = 1, \dots, k \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_i & i = k + 1, \dots, m \end{aligned}$$

W praktyce gospodarczej jest wiele problemów, które można sprowadzić do takiego prostego zapisu. Może to być maksymalizacja zysku przedsiębiorstwa czy minimalizacja kosztów, wybór optymalnego planu produkcji albo gra decyzyjna, której celem jest zebranie jak największej kart. Sam problem optymalizacji na poziomie liniowej funkcji celu i liniowych warunków pobocznych został opracowany jako zadanie pomagające w operacjach wojennych na Pacyfiku. Jest częścią badań operacyjnych.

Jak wiemy, w optymalizacyjnych możemy rozróżnić dwa kryteria: maksymalizację i minimalizację. Jednakże jeden rodzaj optymalizacji można zastąpić drugim rodzajem. Minimalizacja funkcji

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$$

jest równoznaczna funkcji

$$-f(x) = -f(x_1, \dots, x_n).$$

To znaczy, że można dowolnie zastępować funkcję celu a Zadanie Programowania Liniowego [ZPL] z maksymalizacją funkcji celu można zastąpić minimalizacją funkcji doń przeciwnej. Warunki poboczne pozostają bez zmian.

3.2. ZADANIE PROGRAMOWANIA LINIOWEGO

Gdy w modelu matematycznym zarówno funkcja celu jak i warunki ograniczające są funkcjami liniowymi zmiennych, to mówimy, że mamy do czynienia z zadaniem programowania liniowego.

Ogólny model Zadania Programowania Liniowego można wyrazić:

$$(\max) f(x_1, \dots, x_s) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_s x_s$$

przy warunkach

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s \leq b_1 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{ks}x_s \leq b_k \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \dots + a_{k+1s}x_s = b_{k+1} \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{ms}x_s = b_m \end{cases}$$

W podanym modelu ZPL należy wyróżnić:

c_j – wskaźniki funkcji celu,

x_i – zmienne decyzyjne,

b_i – wektor ograniczeń (wyraz wolny).

Obok zasadniczych warunków ograniczających, wyodrębniono warunki nieujemności. Wynika to z opracowanego algorytmu, wymagającego nieujemności zmiennych. Dlatego też warunki nieujemności muszą dotyczyć wszystkich zmiennych używanych w postępowaniu ZPL. W przypadku, gdy którakolwiek zmienna nie spełnia tego warunku, dokonuje się tego przez podstawienie:

$$x_j = x_j' - x_j'' \quad \text{i wówczas} \quad x_j' \geq 0, \quad x_j'' \geq 0.$$

Dla uproszczenia zapisu wygodniej jest korzystać z zapisu:

$$(\max) f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^s c_j x_j$$

przy warunkach

$$\sum_{j=1}^s a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, k)$$

$$\sum_{j=1}^s a_{ij} x_j = b_i \quad (i = k+1, \dots, m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

Innym warunkiem, narzuconym przez algorytm obliczeniowy jest istnienie warunków pobocznych w formie równań. Wówczas postać modelu wygląda następująco:

$$(\max) f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

przy warunkach

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

Zapisanie równań zamiast nierówności wynika z faktu dodania zmiennej dodatkowej do każdej nierówności. Zmienne te (x_{n+i}) zwane są zmiennymi dodatkowymi w odróżnieniu od zmiennych decyzyjnych. Pierwsze zmienne nazywamy zmiennymi niedoboru a drugie zmiennymi nadmiaru. Oczywiście każda zmienna dodatkowa musi spełniać warunek nieujemności. Ponadto zmienna ta w funkcji celu występuje ze współczynnikiem zero i zwykle nie jest zapisywana w zadaniu w funkcji celu. Dlatego też poniżej pokazano jedynie sposób podstawienia i uzyskania wymaganych równań:

$$g_i(x_1, \dots, x_n) \leq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} g_i(x_1, \dots, x_n) + x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \geq 0 \end{cases}$$

oraz

$$g_i(x_1, \dots, x_n) \geq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} g_i(x_1, \dots, x_n) - x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \geq 0 \end{cases}$$

Oba zapisy tego samego zadania są sobie równoważne. Podobnie można dokonać zapisu ZPL w formie macierzowej. Pozwoli to uprościć zapis. Jeśli przez A oznaczmy macierz współczynników z warunków ograniczających, przez b - wektor wyrazów wolnych z tych warunków, c - wektor współczynników z funkcji celu a przez x - wektor zmiennych, to w zapisie macierzowym ZPL będzie mieć postać:

$$(\max) \quad f(x) = c^T x$$

przy warunkach:

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Innym dodatkowym warunkiem, wymaganym w algorytmie ZPL (algorytm simplex) jest występowanie w macierzy warunków ograniczających również macierzy jednostkowej. Możemy zatem napisać, że do przystąpienia do algorytmu simplex wymagane są następujące warunki:

- a) liniowość funkcji celu,
- b) liniowość warunków ograniczających,
- c) występowanie warunków pobocznych w formie równań,
- d) nieujemność zmiennych,
- e) nieujemność elementów składowych wektora wyrazów wolnych,
- f) występowanie macierzy jednostkowej w warunkach ograniczających.

Postać ZPL, które spełnia powyższe warunki nazywamy postacią standardową.

PRZYKŁAD 3.1. Napisz dowolne Zadanie Programowania Linowego w postaci strukturalnej i postaci standardowej.

Zadanie z maksymalizacją funkcji celu (dwie zmienne decyzyjne) :

$$(\max) \quad f(x) = 5x_1 + 3x_2$$

przy warunkach:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$-x_1 + 6x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Można zapisać w postaci standardowej:

$$(\max) f(x) = 5x_1 + 3x_2$$

p.w.

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

$$-x_1 + 6x_2 + x_4 = 12$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_4 \geq 0.$$

W przypadku postaci standardowej macierz A, współczynników stojących przy zmiennych w warunkach pobocznych wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Łatwo widać, że dwie ostatnie kolumny, składające się na macierz jednostkową, odpowiadają zmiennym dodatkowym. Oznacza to, że wektor x zawiera obecnie 4 elementy, z tego dwa decyzyjne i dwa dodatkowe. Zmienne, które stoją przy kolumnach będących wektorami jednostkowymi, nazywane są zmiennymi bazowymi. W powyższym przykładzie zatem wektor x składa się z dwóch zmiennych niebazowych (zmienne decyzyjne) i dwóch zmiennych bazowych (zmienne dodatkowe). Najogólniej można powiedzieć, że zmienne bazowe przybierają wartości wyrazów wolnych, a zmienne niebazowe są równe zeru.

Powyższe uwagi można zapisać następująco:

$$\mathbf{x}_1^B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix},$$

gdzie zapis x_1^B oznacza, że jest to pierwsze bazowe rozwiązanie układu. Nie jest to oczywiście rozwiązanie optymalne. Kolejne rozwiązania będą wynikiem dokonywania operacji elementarnych na elementach macierzy A.

Zasadniczym problemem ZPL będzie przechodzenie od jednego do kolejnego rozwiązania bazowego, ale w kierunku najszybszego wzrostu funkcji celu.

PRZYKŁAD 3.2. W ZPL podanym poniżej znajdź sąsiednie rozwiązanie bazowe

$$(\max) f(x) = 5x_1 + 3x_2$$

przy warunkach:

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

$$-x_1 + 6x_2 + x_4 = 12$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_4 \geq 0$$

Jak łatwo widać, wartość funkcji celu dla

$$\mathbf{X}_1^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

wynosi zero. W kolejnym rozwiązaniu bazowym również wystąpią dwie zmienne (zawsze liczba elementów bazowych odpowiada liczbie warunków pobocznych). Załóżmy, że z bazy wyjdzie zmienna x_3 a na jej miejsce wejdzie zmienna x_1 . Wówczas wykonać należy dwie operacje elementarne: (1) podzielić pierwszy wiersz przez 4, co da układ równań:

$$x_1 + 0,5x_2 + 0,25x_3 = 1,5$$

$$-x_1 + 6x_2 + x_4 = 12$$

a następnie (2) do drugiego wiersza należy dodać wiersz pierwszy. W efekcie tej operacji elementarnej otrzymamy:

$$x_1 + 0,5x_2 + 0,25x_3 = 1,5$$

$$6,5x_2 + 0,25x_3 + x_4 = 13,5$$

Po tej operacji wektor bazowy (bazowe zmienne to zmienna x_1 oraz x_4) będzie wyglądał następująco:

$$\mathbf{X}_2^B = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0 \\ 13,5 \end{bmatrix}.$$

W tym przypadku funkcja celu jest równa 7,5.

Pokazany przykład pozwala prześledzić drogę poszukiwania rozwiązania optymalnego i wskazuje, jak na podstawie danego rozwiązania bazowego $\mathbf{X}^B$ utworzyć inne (sąsiednie) rozwiązanie dopuszczalne poprzez nadanie jednej ze zmiennych dotychczas niebazowych x_k pewnej wartości niezerowej θ_k . Analiza ta pokazana zostanie na danych z przykładu 3.2.

Mamy zatem układ warunków w postaci strukturalnej:

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

$$-x_1 + 6x_2 + x_4 = 12$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_4 \geq 0$$

Jest to układ równań o postaci bazowej względem zmiennych x_3 i x_4 . Wyrazy wolne są dodatnie, czyli spełniony jest stawiany warunek dotyczący wektora b . W oparciu o to rozwiązanie będziemy tworzyli nowe rozwiązanie dopuszczalne poprzez nadanie wartości dodatniej dotychczasowej zmiennej niebazowej x_1 , czyli dotychczas równej zero. Zauważmy, że wzrost x_1 jest możliwy i konieczny tylko do takiej wysokości, kiedy co najmniej jedna z dotychczasowych zmiennych bazowych będzie równa zero. Jednocześnie ten wzrost będzie w sposób następujący zmieniał wektor bazowy:

$$\mathbf{X}^B(\theta_1) = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ 0 \\ 6 - 4\theta_1 \\ 12 + \theta_1 \end{bmatrix} \quad \text{gdy } 0 \leq \theta_1 \leq 1,5,$$

a ponieważ θ_1 nie może być ujemne, to jedynym rozwiązaniem jest $\theta_1 = 1,5$. Zauważmy, że przy $\theta_1 = 1$ otrzymamy nowe rozwiązanie bazowe

$$\mathbf{X}_2^B = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0 \\ 13,5 \end{bmatrix}.$$

Można zatem zapisać twierdzenie, które posłuży do wyboru kolejnego rozwiązania bazowego:

Twierdzenie 3.1

Jeżeli przy rozwiązaniu bazowym $\mathbf{X}^B$ zmiennej niebazowej x_k odpowiada wektor $\mathbf{X}_k^B$, w którym istnieje $x_{ik}^B > 0$ i przyjmiemy

$$\theta_k = \frac{x_r^B}{x_{rk}^B} = \min_{x_{ik}^B > 0} \left\{ \frac{x_i^B}{x_{ik}^B} \right\},$$

wtedy rozwiązanie $\mathbf{X}^B(\theta_k)$ wyznacza sąsiednie względem $\mathbf{X}^B$ rozwiązanie bazowe. Przy omawianiu metody simplex będziemy to kryterium nazywać kryterium wyjścia, ponieważ w oparciu o nie można ustalić, który wektor należy usunąć z bazy B przy wprowadzaniu do niej wybranego wektora.

W oparciu o posiadane rozwiązanie bazowe x_1^B utworzone zostało nowe rozwiązanie, przez przyjęcie, że zmienna dotychczas niebazowa wchodzi do bazy i ma wartość $x_1 = \theta_1$. Odpowiedź na pytanie, czy taka zmiana rozwiązania x_1^B poprawi wartość funkcji celu, dostarczy obliczenie¹ $z_1^B - c_1$. W bazowej postaci układu równań wektor w macierzy A, stojący przy zmiennej x_1^B jest równy

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix},$$

natomiast $c_B = (0, 0)$. Stąd iloczyn $z_1^B - c_1 = 0 - 5 < 0$. To znaczy, że rozwiązanie x_1^B można poprawić. Wyznaczone z niego za pomocą zmiennej x_1 sąsiednie rozwiązanie bazowe x_2^B zapewnia otrzymanie wartości $f(x_2^B) = 7,5$. W rozwiązaniu tym zmienne x_1 i x_4 są zmiennymi bazowymi.

Powyższe uwagi zostaną wykorzystane (są podstawą teoretyczną) do wyboru zmiennych wchodzących do bazy przy metodzie simplex. Przy maksymalizacji funkcji celu przejście do nowego rozwiązania bazowego korzystne jest tylko wtedy, gdy z nową zmienną bazową x_k związana jest wartość $z_k^B - c_k < 0$.

Tworzenie sąsiednich, dopuszczalnych rozwiązań bazowych możliwe jest jednak tylko wtedy, gdy w wektorze $\mathbf{X}_k^B$ istnieje co najmniej jedna składowa dodatnia. Co się natomiast dzieje, gdy $\mathbf{X}_k^B \leq \mathbf{0}$, a przy tym $z_k^B - c_k < 0$? Wówczas nie będziemy mogli zastosować algorytmu simplex. Możemy jednakże napisać, że jeżeli przy rozwiązaniu bazowym $\mathbf{X}_r^B$ otrzymamy wskaźnik optymalności ujemny a jednocześnie

¹ z_k^B jest iloczynem wektora wskaźników funkcji celu przy zmiennych bazowych i elementów wektora macierzy A stojących przy zmiennej k.

wszystkie elementy wektora $x_k^B \leq 0$, to zbiór rozwiązań optymalnych jest nieograniczony, a wektor

$$S = \begin{bmatrix} -x_k^B \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

wyznacza kierunek jednej z krawędzi nieskończonych zbioru. Wychodzi ona z wierzchołka reprezentowanego przez rozwiązanie bazowe poprzednie. Jeśli jednocześnie $z_k^B - c_k < 0$, to w tym zadaniu nie istnieje skończone rozwiązanie optymalne.

Z drugiej strony warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania optymalnego jest, by w rozwiązaniu bazowym X^B dla wszystkich zmiennych niebazowych nieujemne było wyrażenie $z_j^B - c_j$. Tak definiowane będzie kryterium optymalności dla maksymalizacji funkcji celu. Wynika z tego, że w oparciu o wartości wyrażeń $z_j^B - c_j$ obliczonych dla wszystkich zmiennych niebazowych zadania przy danym rozwiązaniu bazowym X^B możemy ustalić, czy jest ono rozwiązaniem optymalnym.

Wskaźniki $z_j^B - c_j$ nazywają się wskaźnikami optymalności.

Gdy przy danym rozwiązaniu X^B istnieje kilka zmiennych niebazowych x_j , dla których $z_j^B - c_j < 0$, to kierować się będziemy wartością bezwzględną tych wskaźników. Wybierać będziemy z ujemnych wskaźnik o największej wartości bezwzględnej. Ten wybór określa się mianem kryterium wejścia.

3.3. WŁASNOŚCI ZADANIA PROGRAMOWANIA LINIOWEGO

Zajmować się będziemy Zadaniem Programowania Liniowego [ZPL], które można przedstawić za pomocą układu:

$$(\max) f(x) = c^T x$$

przy warunkach:

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Każdy z warunków pobocznych reprezentuje półprzestrzeń (w R^2 półpłaszczyznę). Półprzestrzeń jest zbiorem wypukłym. Dlatego zbiór będący iloczynem półprzestrzeni jest również zbiorem wypukłym. W zbiorze rozwiązań dopuszczalnych, będącym iloczynem zbiorów wyznaczonych przez warunki poboczne, istnieją wierzchołki, czyli punkty nie należące do odcinka, którego końce należą do zbioru. Wierzchołki stanowią ważne miejsca z punktu widzenia metody simplex. Szukanie rozwiązania optymalnego jest przechodzeniem po wierzchołkach w kierunku najszybszego wzrostu funkcji celu. Można zapisać następujące własności zbioru rozwiązań dopuszczalnych:

- zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest zbiorem wypukłym,
- jeżeli zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest niepusty, to ZPL ma rozwiązanie optymalne (niekoniecznie skończone),
- wierzchołki zbioru dopuszczalnego to wektory rozwiązań bazowych,
- rozwiązanie optymalne leży na co najmniej jednym wierzchołku,
- jeżeli jest jedno rozwiązanie optymalne, to jest ono wierzchołkiem zbioru wyznaczonego przez warunki poboczne.

PRZYKŁAD 3.3. Znajdź graficznie zbiór rozwiązań dopuszczalnych i rozwiązanie optymalne następującego ZPL:

$$(\max) f(x) = 5x_1 + 3x_2$$

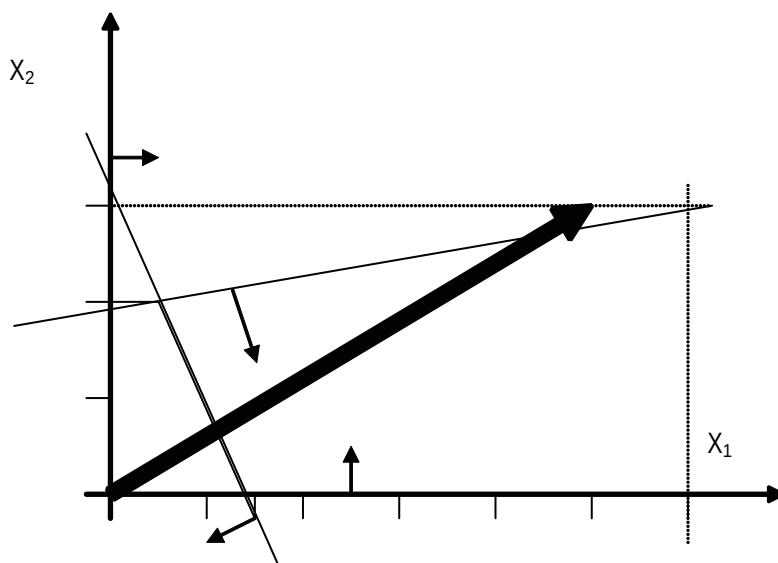
przy warunkach:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$-x_1 + 6x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Warunki poboczne przedstawiają półpłaszczyzny, które wyznaczone są pokazanymi na wykresie prostymi. Wektor pochodnych cząstkowych funkcji celu (gradient) wyznacza kierunek najszybszego wzrostu funkcji celu. $\nabla f^T(x) = [5, 3]$. Zaznaczony czworobok jest zbiorem rozwiązań dopuszczalnych. Łatwo widać, że najdalej w kierunku gradientu (najgrubsza strzałka) leży punkt optymalny, to jest punkt, dla którego wartość funkcji celu jest najwyższa. Ma on współrzędne (wartości zmiennych decyzyjnych) równe: $x_1 = 1,5$ oraz $x_2 = 0$. Te same wartości uzyskano przy szukaniu rozwiązań optymalnych w Przykładzie 3.2.



W ZPL może występować różny układ zbioru warunków dopuszczalnych w stosunku do kierunku gradientu. Możemy mieć zatem sytuację taką, że gradient jest prostopadły (w $\mathbb{R}^2$) do odcinka łączącego dwa wierzchołki. W takim przypadku optimum jest zarówno w obu wierzchołkach, jak i w każdym punkcie odcinka łączącego te wierzchołki. Na potwierdzenie tego zapisu podano poniższy przykład, którego samodzielne rozwiązanie zalecane jest czytelnikowi.

PRZYKŁAD 3.4 Znajdź graficznie zbiór rozwiązań dopuszczalnych, gradient oraz rozwiązanie optymalne (krawędź) ZPL

$$(\max) f(x) = 2x_1 + 2x_2$$

przy warunkach

$$10x_1 + 10x_2 \leq 100$$

$$-4x_1 + 4x_2 \leq 20$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Zbiór rozwiązań dopuszczalnych stanowi pięciobok. Natomiast rozwiązań optymalnych jest tutaj nieskończenie wiele. Tworzą one bok tego pięciokąta. Są one określone wzorem:

$$\mathbf{x}_{\text{opt}} = \lambda \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{przy} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Innym przykładem, w którym na płaszczyźnie łatwo jest określić zbiór rozwiązań dopuszczalnych, ale niemożliwe znalezienie rozwiązania optymalnego, jest sytuacja, kiedy zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest nieograniczony.

PRZYKŁAD 3.5. Znajdź graficznie zbiór rozwiązań dopuszczalnych, gradient oraz pokaż, że nie istnieje skończone rozwiązanie optymalne ZPL.

$$(\max) f(x) = x_1 - 2x_2$$

przy warunkach

$$3x_1 + 6x_2 \geq 18$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 4$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

W tym przykładzie występuje krawędź (część osi OX_1) zaczynająca się w punkcie $[6, 0]$ wskazująca na nieskończenie wiele rozwiązań optymalnych. Jednakże w tym przypadku rozwiązanie optymalne nie istnieje, bądź jest ono w nieskończoności².

Przedstawione przykłady potwierdzają przedstawione wcześniej właściwości ZPL. Rozwiązanie optymalne musi być reprezentowane przez co najmniej jeden z punktów wierzchołkowych. Dla zbiorów ograniczonych mamy oczywiście skończoną liczbę punktów wierzchołkowych, ponieważ są one punktami przecięcia krawędzi zbioru. Wybór wierzchołka optymalnego jest rzeczą trywialną. W przypadku, gdy zbiór rozwiązań dopuszczalnych nie jest ograniczony, do wyznaczenia rozwiązania optymalnego przy maksymalizacji funkcji celu wystarczy ustalić, czy funkcja ta jest ograniczona z góry na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych, a potem określić jej wartości w punktach wierzchołkowych.

PRZYKŁAD 3.6. Znajdź zbiór rozwiązań wierzchołkowych, to jest punktów, w których może znajdować się skończone rozwiązanie optymalne ZPL.

$$(\max) f(x) = 2x_1 + 2x_2$$

przy warunkach

$$10x_1 + 10x_2 \leq 100$$

$$-4x_1 + 4x_2 \leq 20$$

² Przykład ten zostanie zrobiony numerycznie w części objaśniającej metodę simplex. Tam też zostanie pokazany układ elementów macierzy A, który określa taki przypadek.

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Zadanie to było przedmiotem przykładu 3.4. Zgodnie z uwagami do tego przykładu, zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest zbiorem ograniczonym. Na przecięciu trzech prostych, wyznaczających półpłaszczyzny odpowiadające warunkom pobocznym występuje 5 wierzchołków. Mają one współrzędne:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Funkcja celu $f(x) = 2x_1 + 2x_2$ w kolejnych punktach wynosi:

$$f \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = 20, \quad f \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 20, \quad f \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = 14, \quad f \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 10, \quad f \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Wartość 20 jest również w każdym punkcie odcinka łączącego punkty

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ i } \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

W kontekście pokazanego przykładu warto wspomnieć, że ważnym zagadnieniem optymalizacji jest tak zwane Parametryczne Zadanie Programowania Liniowego. Zadanie to może mieć kilka aspektów, które znajdują swe odzwierciedlenie w zmianie:

- współczynników przy zmiennych w funkcji celu³,
- wartości ograniczeń wyrazów wolnych⁴,
- wartości parametrów w warunkach pobocznych⁵,
- polegającej na dodaniu nowych warunków pobocznych⁶,
- na dodaniu nowych zmiennych decyzyjnych⁷.

³ Jeżeli funkcja celu maksymalizuje przychód ze sprzedaży kilku produktów i celem ZPL jest określenie struktury sprzedaży, to zmiana ceny któregośkolwiek z tych produktów jest równoznaczna ze zmianą parametru w funkcji celu.

⁴ Jeżeli istnieje możliwość zwiększenia zakupów jakiegokolwiek surowca czy materiału, to jest to równoznaczne ze zmianą elementu b_i w wyrazie wolnym

⁵ W przypadku zmiany technologii może nastąpić zmiana zużycia jednostkowego materiału, co powoduje zmianę elementu w macierzy A

⁶ W trakcie prowadzenia procesu produkcji może nastąpić reglamentacja kolejnego materiału, co oznacza, że należy wprowadzić odpowiadający mu warunek poboczny.

⁷ W przypadku, gdy zmienne oznaczają procesy produkcyjne lub produkty możliwe jest rozpatrywanie jeszcze innych procesów lub produktów (innowacji), które dotychczas nie były produkowane. Wejście zmiennej nowej (odpowiadającej innowacji) do bazy powoduje akceptację tego produktu w planie produkcyjnym.

3.4. METODA SIMPLEX

3.4.1. Zadanie startowe

Punktem wyjścia dla naszych rozważań będzie standardowa postać ZPL:

$$(\max) f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

przy warunkach

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Zgodnie z wcześniejszymi uwagami, postępowanie dotyczące ZPL obejmuje analizę wierzchołków w kolejności od pierwszego dopuszczalnego rozwiązania do wierzchołka optymalnego, w kierunku najszybszego wzrostu funkcji celu. Oznacza to, że nie są analizowane wartości funkcji we wszystkich wierzchołkach, co byłoby trudne w przypadku zadań o znaczących rozmiarach. Właśnie algorytm Simplex umożliwia analizę tylko tych wierzchołków, w których wartość funkcji celu jest (w przypadku maksymalizacji) nie mniejsza od wartości z ostatniego rozwiązania bazowego.

W postaci standardowej występuje część bazowa wektora $\mathbf{x}$ (stojąca przy kolumnach macierzy jednostkowej) oraz część niebazowa. Można zatem dokonać następującego podziału składowych rozwiązania $\mathbf{x}^B$.

$$\mathbf{x}^B = \begin{bmatrix} x_B \\ x_p \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad \begin{cases} \text{czesc} & \text{bazowa} & x_B \geq 0(m \cdot 1) \\ \text{czesc} & \text{niebazowa} & x_p = 0((n - m) \cdot 1) \end{cases}$$

i zgodnie z podziałem tego wektora również podziału wektorów i macierzy:

$$\mathbf{c} = [\mathbf{c}_B \quad \mathbf{c}_p] \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{P}].$$

Dochodzenie do postaci standardowej może w niektórych przypadkach być kłopotliwe. Nie ma problemów numerycznych, gdy (w przypadku maksymalizacji funkcji celu) warunki ograniczające są sformułowane w sposób dla funkcji celu właściwy⁸, to znaczy ograniczają zmienne od góry. Reprezentuje to zapis:

⁸ Dla minimalizacji funkcji celu znak nierówności w warunkach pobocznych jest odwrotny od znaku dla maksymalizacji.

$$\sum_{j=1}^s a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, k)$$

W takim bowiem przypadku doprowadzenie do postaci standardowej z warunkami pobocznymi w postaci równań wymaga dodania do każdej nierówności zmiennej dodatkowej. W każdym warunku dodawana jest kolejna zmienna dodatkowa, co powoduje, że uzyskuje się jednocześnie spełnienie wymagań dotyczących równości jak i macierzy jednostkowej. Zmienne dodatkowe tworzą bazowe rozwiązanie startowe. Tak było w przypadku Przykładu 3.2.

Może się jednak zdarzyć, że warunki poboczne występują w formie nierówności, które wymagają odjęcia zmiennej dodatkowej, jeżeli chcemy doprowadzić do równości stron. Zmienne dodatkowe (nadmiaru) odejmujemy od lewej strony nierówności. W takim przypadku dodatkowe zmienne zapewniają zachowanie równości, ale nie dają macierzy jednostkowej (rozwiązania startowego). Podobnie jest, gdy warunki poboczne występują od razu w formie równań a nie występuje macierz jednostkowa:

$$\sum_{j=1}^s a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, k)$$

W takim przypadku rozwiązanie startowe uzyskać można za pomocą tak zwanej metody kar. Wówczas konieczne jest wprowadzenie do rozwiązania zmiennych sztucznych. Metoda kar nie daje rozwiązania startowego należącego do zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Jest pierwszym krokiem do uzyskania takiego rozwiązania, ale wymagane jest kilka iteracji, by pierwsze rozwiązanie dopuszczalne uzyskać. Metoda polega na dodaniu sztucznych zmiennych (nieujemnych) tylko z jednej strony równania. Takie działanie powinno to równanie ponownie zamienić w nieostrą nierówność. Zachowanie równości jest właśnie wyrażeniem zgody na opuszczenie zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Aby rozwiązania pozostawały poza zbiorem rozwiązań dopuszczalnych tak krótko, jak to możliwe, należy wraz z dołączeniem sztucznych zmiennych zachować równania, ale do wyjściowej funkcji celu $f(x)$ dołączyć sztuczne zmienne z jednakowymi współczynnikami bardzo niekorzystnymi ze względu na rodzaj kryterium. W przypadku maksymalizacji są to bardzo duże co do wartości bezwzględnej liczby ujemne $(-M)$, a przy

minimalizacji bardzo duże liczby dodatnie M . Noszą one nazwę kar. Skonstruowane w ten sposób zadanie nosi nazwę zadania rozszerzonego. Jego postać wygląda:

$$(\max) f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - M \mathbf{x}_s \quad (M > 0)$$

przy warunkach:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{I}_m \mathbf{x}_s = \mathbf{b} \quad (\mathbf{b} \geq \mathbf{0})$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_s \geq \mathbf{0}$$

Przyjęcie dla M dużej wartości ujemnej będzie preferowało przy maksymalizacji funkcji f te rozwiązania, w których zmienne sztuczne nie wystąpią. Zostaną one w pierwszych iteracjach algorytmu simplex usunięte z bazy. Występowanie zmiennych sztucznych w rozwiązaniu bazowym jest sprzeczne z warunkami zadania i oznacza opuszczenie przez rozwiązania zbioru dopuszczalnego.

Przy rozwiązywaniu zadania rozszerzonego stosujemy więc w pierwszym kroku algorytm simplex aż do chwili, gdy uzyskamy rozwiązanie bazowe bez zmiennych sztucznych. Dopiero wówczas uzyskujemy pierwsze rozwiązanie dopuszczalne. Jeżeli w rozwiązaniu optymalnym pozostaną zmienne sztuczne, to zadanie wyjściowe jest sprzeczne. Można przy tym zastosować zasadę, że przy rozwiązywaniu zadania rozszerzonego sztuczna zmienna usunięta z bazy w pewnej iteracji nie może być już uwzględniana jako kandydat na zmienną bazową w następnych iteracjach.

PRZYKŁAD 3.7. Zapisz postać standardową ZPL

$$(\max) x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$$

przy warunkach:

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 20$$

$$-x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 \geq 10$$

$$2x_1 + 3x_3 - x_4 = 30$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 4)$$

Zadaniem rozszerzonym zbudowanym do zadania wyjściowego jest:

$$(\max) x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - M(x_7 + x_8)$$

przy warunkach:

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

$$-x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 - x_6 + x_7 = 10$$

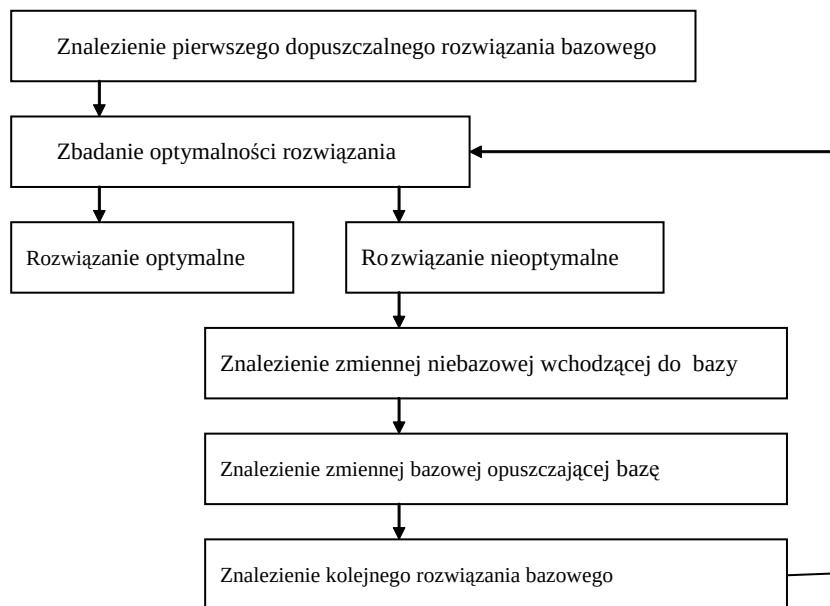
$$2x_1 + 3x_3 - x_4 + x_8 = 30$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 8)$$

Jak łatwo widać w pierwszym warunku wprowadzono zmienną dodatkową x_5 . W drugim warunku pobocznym należało w pierwszym kroku odjąć zmienną x_6 co zapewniło równość, a następnie dodać zmienną sztuczną x_7 jednocześnie wprowadzając ją do funkcji celu. Trzeci warunek wymaga jedynie dodania zmiennej sztucznej x_8 i również wprowadzenia jej do funkcji celu.

Ta postać standardowa wyznacza pierwszą tablicę sympleksową zadania rozszerzonego. W pierwszym zadaniu rozszerzonym bazowe są zmienne x_5 , x_7 , x_8 , gdyż dla tych zmiennych w macierzy A występują wektory jednostkowe. Zgodnie z opisaną wcześniej zasadą zmienne bazowe są równe wyrazom wolnym. Przyjmują one wartości odpowiednio: 20, 10, 30. Pozostałe zmienne (w tym decyzyjne) są równe zero. Warto jeszcze raz przypomnieć, że liczba zmiennych, przyjmujących wartości różne od zera w rozwiązaniu bazowym jest równa liczbie warunków pobocznych⁹. Dopiero kolejne iteracje pozwolą wyeliminować zmienne x_7 i x_8 , co oznaczać będzie pierwsze rozwiązanie bazowe znajdujące się w zbiorze dopuszczalnym. Znalezienie pierwszego dopuszczalnego rozwiązania bazowego jest pierwszym krokiem w metodzie Simplex. Kolejne kroki polegają na zbadaniu, czy jest to rozwiązanie optymalne, a jeżeli nie jest, to znalezienie zmiennej dotychczas niebazowej, która wejdzie do bazy oraz znalezienie zmiennej dotychczas bazowej, która bazę opuści. Można zatem algorytm Simplex przedstawić na schemacie:

⁹ Może się zdarzyć, że któraś ze zmiennych bazowych przyjmie wartość zero, gdyż tyle wynosi wartość wyrazu wolnego. Wówczas mówimy o tak zwanym zdegenerowanym rozwiązaniu bazowym. W takim przypadku zmienna bazowa przyjmująca wartość zero powinna być wyraźnie zaznaczona, by nie doszło do pomyłki polegającej na zaliczeniu jej do zmiennych niebazowych.



Opisane na schemacie działania wygodnie jest przedstawić za pomocą tablicy Simplex.

3.4.2. Tablica Simplex

Omówiony wcześniej sposób kontroli, czy badane rozwiązanie bazowe ZPL jest optymalne oraz podanie zasady konstrukcji lepszego rozwiązania bazowego, gdy taka możliwość istnieje, są wykorzystywane w postępowaniu zwanym algorytmem Simplex (sympleksowym, simplexowym). Postępowanie to ma charakter postępowania iteracyjnego, i w przypadku istnienia rozwiązania optymalnego prowadzi do jego znalezienia.

Macierz $\mathbf{A}$, będąca zasadniczą częścią tablicy Simplex składa się z wektorów kolumnowych $\mathbf{x}_j^B$. Elementy składowe tych wektorów służą do wyznaczania opisanych wcześniej wartości wskaźników optymalności $z_j^B - c_j$, a przede wszystkim do budowy nowego rozwiązania bazowego. Występują one, gdy zapiszemy układ równań ograniczających w formie macierzowej. Dlatego kolejne iteracje w tablicy Simplex powinny zawierać wszystkie niezbędne elementy do wykonania pokazanych na schemacie czynności. Macierz współczynników z formy bazowej warunków ograniczających, część bazową rozwiązania bazowego rozpatrywanego w danej iteracji oraz wskaźniki optymalności

zmiennych zestawia się w tablicy, której ogólna postać została pokazana poniżej:

			C_1	C_2	C_3		C_n	
C_j^B	Baza	b	x_1	x_2	x_3	...	x_n	Wskaźniki wyjścia
C_j^B	X^B	b	X_1^B	X_2^B	X_3^B		X_n^B	$\frac{b_i}{X_{ik}}$
Wskaźniki wejścia	$C^T X^B$		$Z_1 - C_1$	$Z_2 - C_2$	$Z_3 - C_3$		$Z_n - C_n$	

Jeśli B i B' są bazami sąsiednimi oraz $B' = \{a_k\} + B - \{a_i\}$, to wektor $x_j^{B'}$ można otrzymać za pomocą wektorów X_i^B w oparciu o znane w teorii algebry liniowej wzory przejścia, odpowiadające pokazanym w rozdziale pierwszym operacjom elementarnym.

Wyznaczanie elementów tablicy sympleksowej wygodnie jest rozpoczynać od wiersza związanego z nową (wprowadzoną obecnie) zmienną bazową x_k , a potem przejść do obliczania pozostałych elementów. Możemy przyjąć, że operacje będziemy wykonywać na wierszach macierzy A . Oznaczmy przez w_i – wiersz starej tablicy sympleksowej związany z nową (dotychczas niebazową), wchodzącą obecnie do bazy zmienną x_i , a przez w'_i – analogiczny wiersz w nowej tablicy sympleksowej, w której ta zmienna będzie zmienną bazową. Proces numeryczny budowy tablicy wierszami można schematycznie zapisać:

$$w'_i = w_i - x_{ik} w'_k \quad (i \neq k)$$

PRZYKŁAD 3.8. Napisać tabelę Simplex dla ZPL z przykładu 3.7.

Zadanie to w postaci standardowej miało postać (zadanie rozszerzone):

$$(\max) x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - M(x_7 + x_8)$$

przy warunkach:

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

$$-x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 - x_6 + x_7 = 10$$

$$2x_1 + 3x_3 - x_4 + x_8 = 30$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 8)$$

W pierwszym rozwiązaniu bazowym zmiennymi bazowymi są: zmienna dodatkowa niedoboru x_5 oraz zmienne sztuczne x_7 i x_8 . Trzy zmienne bazowe odpowiadają liczbie warunków pobocznych zada-

nia. Pozostałe zmienne, w tym wszystkie zmienne decyzyjne nie będąc zmiennymi bazowymi mają nadaną wartość zero.

		0	1	2	-3	4	0	0	-M	-M	
c_j^B	Baza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Wskaźniki wyjścia
0	x_5	20	2	4	3	1	1	0	0	0	20
-M	x_7	10	-1	2	-5	4	0	-1	1	0	10/4
-M	x_8	30	2	0	3	-1	0	0	0	1	.
Wskaźniki wejścia		-40M	-M-1	-2M-2	2M+3	-3M-4	•	M	•	•	

Komentarz do tablicy:

- w wierszu pierwszym znajdują się wskaźniki z funkcji celu stojące przy każdej zmiennej x_i , przy czym oczywiście brak jakiegś zmiennej w funkcji celu oznacza, że wskaźnik z funkcji celu jest równy zero,
- wiersz drugi jest główką tabeli, pokazuje zatem co mieści się w odpowiednich kolumnach, przy czym c_j^B oznacza, że są to wyrazy z funkcji celu, stojące przy zmiennych bazowych danego rozwiązania,
- Baza zawiera zbiór elementów składowych wektora X , które to elementy są w obecnym rozwiązaniu elementami bazowymi,
- Wektor b zawiera wyrazy wolne, jednocześnie są to wartości zmiennych bazowych. Oznacza to, że wektor bazowy ma obecnie następujące elementy składowe (zmienne niebazowe są równe zero):

$$X_1^B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix}$$

- w kolumnach pod odpowiednimi x_i znajdują się elementy macierzy A , składającej się z wektorów stojących przy odpowiednich zmiennych w warunkach pobocznych, oczywiście zera występują wówczas, jeżeli dana zmienna nie występuje w odpowiednim warunku,

- łatwo zauważyć, że trzy zmienne bazowe mają w macierzy A wektory jednostkowe, które łącznie tworzą macierz jednostkową trzeciego stopnia,

$$X_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- wiersz „wskaźniki wejścia” to zestawienie wskaźników optymalności $z_j - c_j$, czyli iloczynów wskaźników funkcji celu stojących przy zmiennych bazowych w danym rozwiązaniu (tu c_j^B) i wektorów stojących w kolumnach w macierzy A , (tu X_i^B) pomniejszonych o wartość stojącą przy danej zmiennej w funkcji celu. Dla przykładu, wartość w kolumnie x_1 została wyliczona w sposób następujący:

$$\begin{aligned} [0, -M, -M] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 &= 2 \cdot 0 + (-M) \cdot (-1) + (-M) \cdot 2 - 1 = \\ &= M - 2M - 1 = -M - 1 \end{aligned}$$

- w wierszu „wskaźniki wejścia” pod wektorem b znajduje się wartość funkcji dla danego rozwiązania bazowego, czyli w tym przypadku jest to wartość $-40M$. Jest ona liczona w ten sam sposób, jak wskaźniki $z_j - c_j$, z tym, że nad wektorem b , w wierszu pierwszym występuje wartość wyrazu wolnego z funkcji celu pisanego ze znakiem przeciwnym (w tym przykładzie zero), w kolumnach bazowych w miejsce zera wpisane są kropki. Te kropki wskazują, że wartość ta jest równa zero, ale występuje w kolumnie odpowiadającej zmiennej bazowej, w odróżnieniu od przypadku, kiedy wskaźnik optymalności jest równy zero w kolumnie niebazowej i wówczas jest to znak tego, że istnieją alternatywne rozwiązania optymalne,
- w kolumnie „wskaźniki wyjścia” przedstawione są wskaźniki wyliczone zgodnie z wzorem

$$\frac{b_i}{X_{ik}}$$

dla kolumny x_4 , gdyż w kolumnie tej wskaźnik optymalności jest ujemny i ma największą wartość bezwzględną spośród wszystkich ujemnych wskaźników optymalności, to znaczy, że jest to kolumna wybrana zgodnie z opisanym w dalszej części sposobem wyboru zmiennych wchodzących do bazy (w kolejnej iteracji x_4 będzie zmienną bazową):

$$\min \{-M - 1; -2M - 2; -3M - 4\} = -3M - 4 = z_4 - c_4$$

- Wskaźniki wyjścia liczone są dla wszystkich dodatnich elementów w wektorze kolumnowym zmiennej wchodzącej do bazy. Kryterium wyjścia do bazy jest minimalizacja ilorazu

$$\frac{b_i}{X_{ik}}$$

Oznacza to, że zmienna x_4 zastąpi dotychczasową zmienną bazową (sztuczną) x_7 , gdyż:

$$\min \{20; 2,5\} = 2,5.$$

Przykład ten pokazuje zasady zapisu całej tablicy Simplex oraz sposób wykonywania iteracji. Zanim przejdziemy do kolejnych przykładów zostanie pokazana podstawa teoretyczna postępowania w algorytmie sympleksowym. Te czynności określa się mianem „konstrukcji sąsiedniego rozwiązania bazowego”.

Algorytm Simplex prowadzi do uzyskania optymalnego rozwiązania ZPL. Oznacza to, że jeżeli zbiór rozwiązań dopuszczalnych nie jest zbiorem pustym, to ZPL ma rozwiązanie optymalne (niekoniecznie skończone), a gdy ten zbiór jest ograniczony, to rozwiązanie jest skończone. Kolejne iteracje polegają na badaniu sąsiednich wierzchołków zbioru rozwiązań dopuszczalnych w kierunku najszybszego wzrostu wartości funkcji celu. Postępowanie kończy się wraz ze stwierdzeniem, że albo:

- dane rozwiązanie jest optymalne,
- dane rozwiązanie jest optymalne ale istnieją inne alternatywne rozwiązania optymalne, dające tę samą wartość funkcji celu,
- istnieją nieskończone krawędzie zbioru rozwiązań dopuszczalnych, na których leży rozwiązanie optymalne,
- zadanie jest sprzeczne.

Warunkiem koniecznym rozwiązania optymalnego jest niemożliwość poprawienia obecnego, ostatniego rozwiązania bazowego. Można zatem sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.2. Jeżeli w ZPL z maksymalizacją funkcji celu dla danej postaci bazowej wszystkie wskaźniki optymalności stojące przy zmiennych niebazowych ($z_j - c_j \geq 0$ dla $j \notin B$) są nieujemne, to rozwiązanie bazowe jest optymalne¹⁰. Jeżeli są dodatnie, to jest to jedyne rozwiązanie optymalne. Jeżeli któryś ze wskaźników optymalności stojących przy zmiennych niebazowych jest równy zero, to istnieją alternatywne rozwiązania bazowe.

Oczywiście w podanym przykładzie 3.8. rozwiązanie bazowe nie jest optymalne. Nie jest ono nawet rozwiązaniem dopuszczalnym, gdyż w nim występują zmienne sztuczne. Warto zatem znaleźć pierwsze dopuszczalne rozwiązanie dla tego ZPL. Uzyskanie tego rozwiązania odbywać się będzie zgodnie z algorytmem Simplex. Dlatego też warto w tym miejscu zapisać dwa, wspomniane wcześniej kryteria (stosowane, gdy rozwiązanie nie jest optymalne):

- kryterium wejścia: jako nową zmienną bazową należy wziąć tę, dla której wskaźnik optymalności (przy maksymalizacji funkcji celu) jest ujemny i ma największą wartość bezwzględną spośród wszystkich ujemnych wskaźników optymalności. W takim przypadku uzyskamy największy wzrost funkcji celu¹¹.
- Kryterium wyjścia: zmienna dotychczas bazowa opuszcza bazę, gdy wskaźnik wyjścia

$$\frac{b_i}{X_{ik}}$$

wyliczony dla wchodzącej do bazy zmiennej x_i , przyjmuje najmniejszą wartość¹².

PRZYKŁAD 3.9. Stosując algorytm Simplex znajdź pierwsze dopuszczalne rozwiązanie bazowe dla ZPL z przykładu 3.7.

Zgodnie z przykładem 3.8. pierwsza tablica Simplex wygląda następująco:

¹⁰ W przypadku minimalizacji funkcji celu wskaźniki optymalności powinny być niedodatnie.

¹¹ Dla minimalizacji funkcji celu wybieramy dodatnie wskaźniki optymalności i szukamy największego z nich.

¹² Liczony jest tylko dla elementów dodatnich.

		0	1	2	-3	4	0	0	-M	-M	
c_j^B	Baza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Wskaźniki wyjścia
0	x_5	20	2	4	3	1	1	0	0	0	20
-M	x_7	10	-1	2	-5	4	0	-1	1	0	10/4
-M	x_8	30	2	0	3	-1	0	0	0	1	.
Wskaźniki wejścia		-40M	-M-1	-2M-2	2M+3	-3M-4	•	M	•	•	

Podane powyżej kryterium wejścia określa, że do bazy wejdzie x_4 . Jej wskaźnik optymalności (zaznaczony szarym kolorem) jest ujemny i najmniejszy (największy co do wartości bezwzględnej). Dlatego też dla kolumny x_4 wyznaczone zostały wskaźniki wyjścia. Obliczone są one poprzez podzielenie kolejnych elementów wektora b, przez kolejne dodatnie elementy wektora x_4^B to znaczy: 20/1 oraz 10/4. Nie liczymy trzeciego wskaźnika, gdyż trzeci element w x_4^B jest ujemny (-1).

Spośród wyliczonych wskaźników (kryterium wyjścia) minimalny jest wskaźnik w wierszu drugim, odpowiadającemu zmiennej x_7 . Dlatego też ta zmienna wyjdzie z bazy. Oznacza to, że obecnie macierz jednostkowa będzie utworzona z wektorów X_4 , X_5 oraz X_8 . W pierwszym kroku zapiszmy te wektory w kolejnej tablicy Simplex. Łatwo zauważyć, że tę postać macierzy jednostkowej uzyskać trzeba z macierzy jednostkowej złożonej z wektorów X_5 , X_7 oraz X_8 . Z punktu widzenia przekształceń elementarnych oznacza to lewostronne pomnożenie macierzy A przez macierz przejścia (jest łatwa do wyznaczenia na podstawie rozdziału 1). W dotychczasowej macierzy element w kolumnie X_4 i wierszu X_7 był równy 4. Przekształcenie polegać więc będzie w pierwszym kroku na podzieleniu drugiego wiersza przez 4. Uzyskamy wówczas (wstawiając do zbioru zmiennych bazowych X_4)

		0	1	2	-3	4	0	0	-M	-M	
c_j^B	Baza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Wskaźniki wyjścia
0	x_5	20	2	4	3	1	1	0	0	0	
4	x_4	10/4	-1/4	2/4	-5/4	1	0	-1/4	1/4	0	
-M	x_8	30	2	0	3	-1	0	0	0	1	
Wskaźniki wejścia											

W kolejnym kroku należy uzyskać w kolumnie x_4 zera w pierwszym i trzecim wierszu. Oznacza to ponowne wykonanie operacji elementarnych polegających na:

- na odjęciu od wiersza pierwszego wiersza drugiego,
- dodaniu do wiersza trzeciego wiersza drugiego.

Obie te operacje elementarne można łatwo przedstawić za pomocą macierzy B, która lewostronnie pomnożona przez dotychczasową macierz A pozwoli na uzyskanie kolejnej tablicy Simplex o postaci:

		0	1	2	x_3	4	0	0	-M	-M	
c_j^B	Baza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Wskaźniki wyjścia
0	x_5	70/4	9/4	14/4	17/4	0	1	1/4	-1/4	0	
4	x_4	10/4	-1/4	2/4	-5/4	1	0	-1/4	1/4	0	
-M	x_8	130/4	7/4	2/4	7/4	0	0	-1/4	1/4	1	
Wskaźniki wejścia											

W tym przypadku zmiennymi bazowymi są: x_4 , x_5 oraz x_8 . Jak łatwo widać w tablicy Simplex nie są one w tej kolejności. Przedstawiona w tablicy kolejność w bazie jest wynikiem zamiany zmiennej x_7 na zmienną x_4 . Rozwiązanie bazowe ma postać:

$$\mathbf{X}_2^B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10/4 \\ 70/4 \\ 0 \\ 10 \\ 130/4 \end{bmatrix}$$

W kolejnym kroku liczone są wskaźniki optymalności. Dla najmniejszego spośród ujemnych wskaźników optymalności (dla x_1) liczone są wskaźniki wyjścia:

		0	1	2	-3	4	0	0	-M	-M	
c_j^B	Baza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Wskaźniki wyjścia
0	x_5	70/4	9/4	14/4	17/4	0	1	1/4	-1/4	0	70/9
4	x_4	10/4	1/4	2/4	5/4	1	0	-1/4	1/4	0	.
-M	x_8	130/4	7/4	2/4	7/4	0	0	-1/4	1/4	1	130/7
Wskaźniki wejścia		10 - 130M/4	-2 - 7M/4	0 - 2M/4	-2 - 7M/4	•	•	-1 + M/4	1 + 3M/4	•	

Rozwiązanie to oczywiście nie jest optymalne. Również nie jest dopuszczalne, gdyż zawiera zmienną sztuczną x_8 . W kolejnej iteracji bazę opuszcza zmienna x_5 , gdyż wskaźnik wyjścia dla tej zmiennej jest najmniejszy (równie niski i ujemny jest wskaźnik przy x_3 , ale zastosujemy zasadę wskaźnika o niższym numerze). Następna, liczona również na podstawie kryteriów wejścia i wyjścia tablica wygląda następująco:

		0	1	2	-3	4	0	0	-M	-M	
c_j^B	Baza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Wskaźniki wyjścia
0	x_1	7 7/9	1	1 5/9	1 8/9	0	4/9	1/9	-1/9	0	
4	x_4	4 4/9	0	8/9	- 7/9	1	1/9	-2/9	2/9	0	
-M	x_8	18 8/9	0	-2 2/9	-1 5/9	0	-7/9	-4/9	4/9	1	
Wskaźniki wejścia		25 5/9 - 18M 8/9	•			•				•	

Czytelnik łatwo wyliczy, że wszystkie wskaźniki optymalności przy zmiennych niebazowych są dodatnie, co sugeruje, iż jest to rozwiązanie optymalne. Jednakże w tym rozwiązaniu występuje ciągle zmienna sztuczna x_8 . A zatem powyższe ZPL jest sprzeczne. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych tego zadania jest zbiorem pustym.

PRZYKŁAD 3.10. Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład liczbowy wyznaczania rozwiązania optymalnego stosując algorytm Simplex. Dane jest ZPL:

$$(\max) 2x_1 + 2x_2$$

przy warunkach:

$$4x_1 + 4x_2 \leq 80$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 20$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2)$$

Zadanie to po sprowadzeniu do postaci standardowej wygląda następująco:

$$(\max) 2x_1 + 2x_2$$

przy warunkach:

$$4x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 80$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_4 \leq 20$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2)$$

co oznacza, że nie trzeba wstawiać zmiennych sztucznych a macierz jednostkowa została utworzona z wektorów stojących przy zmiennych dodatkowych. Dlatego pierwsza tablica Simplex wygląda następująco:

1	c_j	0	2	2	0	0	
c_j^B	Baza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	WW
0	x_3	80	4	4	1	0	20
0	x_4	20	2	-2	0	1	10
$z_j - c_j$		0	-2	-2	•	•	

Z dwóch ujemnych jednakowych wskaźników optymalności wybierzemy wskaźnik x_1 . Ta zmienna wejdzie do bazy. Wskaźniki wyjścia [WW] policzone po prawej stronie wskazują, że zmienna x_1 wejdzie na miejsce zmiennej x_4 . Zastosowanie operacji elementarnych prowadzi zatem do tablicy:

2	c_j	0	2	2	0	0	
c_j^B	Baza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	WW
0	x_3	40	0	8	1	-2	5
2	x_1	10	1	-1	0	0,5	
$z_j - c_j$		20	•	-4	•	1	

W tej tablicy jest tylko jeden wskaźnik optymalności ujemny. Oznacza to, że rozwiązanie nie jest optymalne. Wartość funkcji wzrosła z 0 do 20. W pokazanym przypadku tylko jedna zmienna może opuścić bazę, gdyż jeden element w kolumnie x_2 jest ujemny. Mimo to został wyliczony wskaźnik wyjścia. W następnej iteracji zmienna x_2 wejdzie na miejsce x_3 . Tablica będzie miała wygląd:

3	c_j	0	2	2	0	0	
c_j^B	Baza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	WW
2	x_2	5	0	1	0,125	-0,25	
2	x_1	15	1	0	0,125	0,25	60
$z_j - c_j$		40	•	•	0,5	0	

W tym przypadku nie występują ujemne wskaźniki wejścia (optymalności). Oznacza to, że trzecia (numery tablicy występują w lewym górnym rogu) tablica dała rozwiązanie optymalne. Jednak jeden ze wskaźników optymalności (dla x_4) jest równy zero. Oznacza to, że istnieje alternatywne rozwiązanie bazowe. Wyliczony wskaźnik wyjścia w tej tablicy pokazuje, że bazę opuści x_1 . Kolejne rozwiązanie optymalne pokazuje tablica:

4	c_j	0	2	2	0	0	
c_j^B	Baza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	WW
2	x_2	20	1	1	0,25	0	20
0	x_4	60	4	0	0,5	1	15
$z_j - c_j$		40	0	•	0,5	•	

Łatwo zauważyć, że w tablicy 3 i tablicy 4 wartość funkcji celu jest taka sama i wynosi 40. Są to dwa wierzchołki dające identyczną wartość funkcji celu. W tablicy 4 wskaźnik optymalności przy x_1 jest również równy zero, z wskaźniki wyjścia pokazują, że wprowadzenie zmiennej x_1 w miejsce x_4 doprowadzi nas do tablicy 3.

Kolejne wektory, odpowiadające czterem iteracjom Simplex wyglądają następująco:

$$\mathbf{X}_1^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 80 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2^B = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_3^B = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_4^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix}$$

A wartości funkcji są równe:

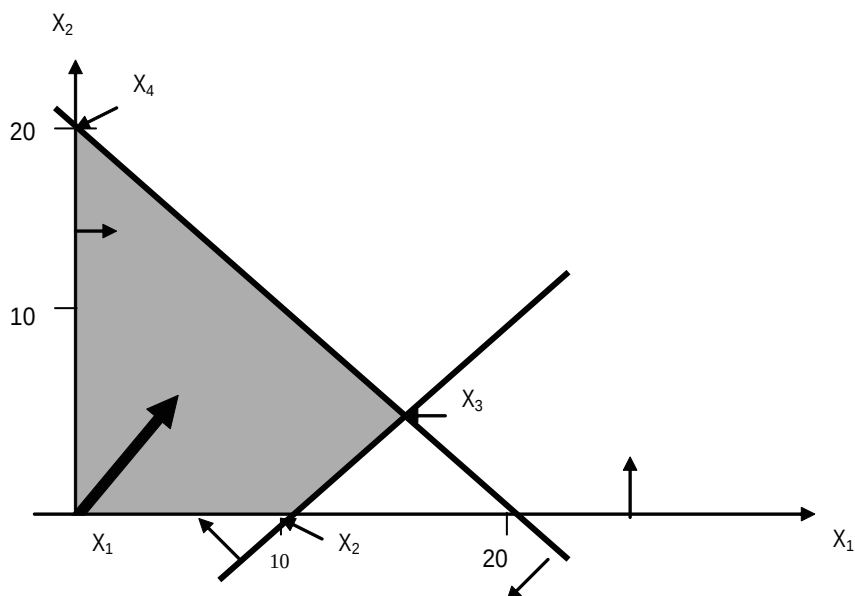
$$f(\mathbf{X}_1^B) = 0, \quad f(\mathbf{X}_2^B) = 20, \quad f(\mathbf{X}_3^B) = 40, \quad f(\mathbf{X}_4^B) = 40.$$

Wierzchołki $\mathbf{X}_3^B$ oraz $\mathbf{X}_4^B$ są optymalne, co oznacza, że również cały

odcinek daje rozwiązania optymalne. Można zatem zapisać, że optymalnym rozwiązaniem jest:

$$\mathbf{X}_{\text{opt}}^B = \gamma \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (1 - \gamma) \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix} \text{ dla } \gamma \in \langle 0, 1 \rangle$$

W zadaniu występują cztery zmienne, z czego dwie są decyzyjne. Z punktu widzenia decyzji ważne są zatem wartości dwóch pierwszych elementów wektorów. Wektory te są kolejnymi wierzchołkami zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Zostało to pokazane poniżej:



Linia grubą pokazany został gradient funkcji celu. Kolejne rozwiązania znajdują się w punktach $[0, 0]$, $[10, 0]$, $[15, 5]$, $[0, 20]$. Dwa ostatnie punkty wyznaczają odcinek prostopadły do gradientu. Na nim znajdują się rozwiązania optymalne.

3.5. ZADANIE DUALNE PROGRAMOWANIA LINIOWEGO

Punktem wyjścia dla naszych rozważań będzie postać ZPL:

$$\max) f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^s c_j x_j$$

przy warunkach

$$\sum_{j=1}^s a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Jest ona równoważna zapisowi w postaci macierzowej:

$$(\max) f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

przy warunkach

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Zadanie powyższe nazywamy zadaniem prymarnym. Czasami, z różnych przyczyn, w tym przyczyn obliczeniowych oraz interpretacyjnych, warto jest zbudować do tego zadania zadanie dualne [ZDPL]. Zadanie dualne programowania liniowego ma postać:

$$(\min) g(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

przy warunkach

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

Jak łatwo widać współczynniki funkcji celu z zadania prymarnego stały się wyrazami wolnymi w warunkach ograniczających a wyraz wolny stanowi współczynniki funkcji celu zadania dualnego. Zmienne x zostały zastąpione zmiennymi y .

Można sformułować następujące twierdzenia:

Twierdzenie 3.3. ZPL i ZDPL są dualne względem siebie.

Oznacza ono, że z zadania dualnego możemy ponownie otrzymać zadanie prymarne, jeżeli zapiszemy zadanie dualne do dualnego.

Twierdzenie 3.4. Jeżeli zbiór X rozwiązań dopuszczalnych zadania prymarnego nie jest pusty i zbiór Y rozwiązań zadania dualnego programowania liniowego nie jest pusty, to spełniony jest warunek $f(x) \leq g(y)$ dla wszystkich $x \in X$ oraz $y \in Y$.

Twierdzenie to oznacza, że wartość maksymalizowanej funkcji celu zadania prymarnego jest nie większa niż wartość minimalizowanej funkcji celu zadania dualnego.

Twierdzenie 3.5. Jeżeli zadania ZPL i ZDPL mają rozwiązanie optymalne to prawdziwy jest zapis:

$$\max_{x \in X} f(x) = \min_{y \in Y} g(y)$$

Oznacza to, że wartość maksymalizowanej funkcji celu w jej optimum jest równa wartości minimalizowanej funkcji celu w jej optimum.

Tworzenie ZDPL do ZPL wymaga następujących zasad:

- jeżeli w ZPL jeden z warunków ma zwrot nierówności niezgodny z wymaganiem funkcji celu¹³ to w zadaniu dualnym związana z tym warunkiem zmienna przyjmuje wartości niedodatnie,
- jeżeli w ZPL warunek poboczny jest sformułowany w postaci równania, to związana z nim zmienna dualna jest dowolnego znaku,

PRZYKŁAD 3.11. Znajdź postać dualnego zadania programowania liniowego do zadania:

$$\text{Max } f(x) = 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4$$

przy warunkach

$$3x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 9x_4 \leq 13$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 8x_4 = 15$$

$$1x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 \geq 17$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \text{ dowolne}, \quad x_3 \leq 0, \quad x_4 \geq 0$$

Zgodnie z poprzednimi zapisami ZDPL wygląda następująco:

¹³ Zadanie z maksymalizacją funkcji celu powinno mieć warunki poboczne nie większe niż wyrazy wolne, natomiast zadanie z minimalizacją funkcji celu powinno mieć warunki poboczne nie mniejsze od wyrazów wolnych.

$\text{Min } g(x) = 13y_1 + 15y_2 + 17y_3$
przy warunkach

$$3y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 1$$

$$5y_1 + 4y_2 + 3y_3 = 2$$

$$7y_1 + 6y_2 + 5y_3 \leq 3$$

$$-9y_1 - 8y_2 - 7y_3 \geq -4$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \text{ dowolne}, y_3 \leq 0.$$

Zadania ZPL i ZDPL są ponadto powiązane w ten sposób, że wskaźniki optymalności w rozwiązaniu optymalnym zadania prymarnego pozwalają odczytać wartości rozwiązania optymalnego zadania dualnego. Można to sformułować następująco:

- wskaźniki optymalności zmiennych dodatkowych w optymalnym rozwiązaniu ZPL z kryterium maksymalizacji podają wartości optymalne dla sprzężonych z nimi zmiennych decyzyjnych ZDPL, przy czym w przypadku, gdy zmienne sprzężone są zmiennymi nadmiaru należy zmienić znak tej zmiennej,
- wskaźniki optymalności zmiennych decyzyjnych w optymalnym rozwiązaniu ZPL z kryterium maksymalizacji funkcji celu podają wartości zmiennych dodatkowych z optymalnego rozwiązania zadania dualnego.

PRZYKŁAD 3.12. Zapisz zadanie dualne do ZPL z przykładu 3.10. i porównaj z rozwiązaniem zadania prymarnego.

Dla przypomnienia zadanie ma następującą postać:

$$(\max) 2x_1 + 2x_2$$

przy warunkach:

$$4x_1 + 4x_2 \leq 80$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 20$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2)$$

Zadanie dualne ma zatem postać następującą:

$$(\min) 80y_1 + 20y_2$$

przy warunkach:

$$4y_1 + 2y_2 \geq 2$$

$$4y_1 - 2y_2 \geq 2$$

$$y_j \geq 0 \ (j = 1, 2)$$

a po sprowadzeniu do postaci standardowej:

$$(\min) 80y_1 + 20y_2 + M(y_5 + y_6)$$

przy warunkach:

$$4y_1 + 2y_2 - y_3 + y_5 = 2$$

$$4y_1 - 2y_2 - y_4 + y_6 = 2$$

$$y_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, 6)$$

Rozwiązanie tego zadania metodą Simplex nie jest kłopotliwe. Kolejne kroki algorytmu pokazują poniższe tabele:

1	c_j	0	80	20	0	0	M	M	
c_j^B	baza	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	WW
M	y_5	2	4	2	-1	0	1	0	0,5
M	y_6	2	4	-2	0	-1	0	1	0,5
		2M	8M - 80	-20	-M	-M	•	•	

W przypadku minimalizacji funkcji celu, optymalne rozwiązanie potwierdzają wskaźniki optymalności ujemne (niedodatnie). W tablicy powyższej dodatni jest jeden wskaźnik, stojący w kolumnie y_1 . Zmienna ta wejdzie do bazy. Wskaźniki wyjścia (WW) są równe 0,5, wybieramy dowolny, pierwszy od góry, co oznacza, że bazę opuści zmienna sztuczna y_5 . Kolejna tablica ma wygląd:

2	c_j	0	80	20	0	0	M	M	
c_j^B	baza	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	WW
80	y_1	0,5	1	0,5	-0,25	0	0,25	0	.
M	y_6	0	0	-4	1	-1	-1	1	0
		40	•	-4M + 20	M - 20	-M	-2M + 20	•	

W tej tabeli ponownie jeden wskaźnik jest dodatni (dla y_3). Zmienna ta wejdzie do bazy w kolejnym rozwiązaniu. W kolumnie nad wskaźnikiem jeden element jest dodatni. Pozwala to wyliczyć wskaźnik wyjścia. Jest on równy zero, co oczywiście nie oznacza, że nie spełnia to warunków liczenia tego wskaźnika. Ważne jest, by element kolumny, przez który dzielimy, był dodatni. W tym przypadku jest to jedynka. Z bazy wyjdzie zatem druga i zarazem ostatnia zmienna sztuczna (y_6). Ostatnia tablica, już z optymalnym rozwiązaniem ZDPL wygląda następująco:

3	c_j	0	80	20	0	0	M	M
c_j^B	baza	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
80	y_1	0,5	1	-0,5	0	-0,25	0	0,25
0	y_3	0	0	-4	1	-1	-1	1
		40	•	-60	•	-20	-M	-M+20

Dla przypomnienia wyników zadania prymarnego pokażmy tablicę z rozwiązaniem optymalnym ZPL:

4	c_j	0	2	2	0	0	
c_j^B	Baza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	WW
2	x_2	20	1	1	0,25	0	20
0	x_4	60	4	0	0,5	1	15
$z_j - c_j$		40	0	•	0,5	•	

Następujące wielkości potwierdzają wcześniejsze uwagi:

- wartość funkcji w obu zadaniach wynosi 40,
- w ZPL wskaźniki optymalności przy zmiennych dodatkowych wynoszą: 0,5 oraz zero (zaznaczone kropką), co odpowiada wartościom zmiennych decyzyjnych ZDPL, gdyż wartość y_1 wynosi 0,5 a y_2 jest równe zero (jako zmienna niebazowa),
- z ZPL wskaźniki optymalności zmiennych decyzyjnych (zero dla obu zmiennych), są równe wartościom zmiennych dodatkowych rozwiązania optymalnego ZDPL, gdyż $y_3 = 0$ (bazowa) a $y_4 = 0$ jako zmienna niebazowa.

Analizę wskaźników ZDPL dokona Czytelnik samodzielnie, pamiętając, że zmienne y_3 oraz y_4 były zmiennymi nadmiaru, co wymaga zmiany znaku przy porównaniach z ZPL.

Dualne zadanie służy nie tylko ewentualnej łatwości liczenia. Ważna jest również interpretacja ekonomiczna obu zadań. Poniżej przedstawiono niektóre elementy interpretacji ekonomicznej elementów zadania dualnego i prymarnego:

PRZYKŁAD 3.13. Zakład wytwórczy może uruchomić p procesów produkcyjnych, co odpowiada liczbie zmiennych decyzyjnych x . Dwa różne procesy mogą służyć do wytworzenia dwóch różnych produktów,

ale mogą wytwarzać ten sam produkt przy innych technologiach. Podaj interpretację ekonomiczną elementów ZPL i ZDPL¹⁴.

- m – Liczba ograniczonych środków niezbędnych do uruchomienia procesów. Zasoby tych środków reprezentuje wektor $\mathbf{b}^T = [b_1, b_2, \dots, b_m]$.
- a_{ij} – wielkość nakładu środka i na jednostkę procesu j . Jest stała i niezależna od poziomu procesu.
- $\mathbf{a}_j$ – wektor nakładów jednostkowych związany z procesem j .
- c_j – dochód z każdej jednostki procesu j .
- Maksymalizacja funkcji celu odpowiada zadaniu: ustalić intensywność procesów produkcyjnych, które przy istniejących zasobach zapewnią maksymalny dochód, x_j – planowany poziom procesu j .
- Zadanie: $\max \sum_{j=1..p} c_j x_j$

$$\text{p.w.} \quad \sum_{j=1..p} a_{ij} x_j \leq b_i \quad x_j \geq 0 \quad j=1, \dots, p$$

w postaci standardowej wygląda:

$$\sum_{j=1..p} a_{ij} x_j + \sum_{i=1..m} e_i x_{p+i} = b_i \quad x_j \geq 0 \quad j=1, \dots, p, p+1, \dots, n$$

- x_{p+i} – poziom procesu niewykorzystania środka i (dlatego przychód $c_{p+i} = 0$)
- każde dopuszczalne rozwiązanie tego zadania jest liczbową charakterystyką pewnego planu produkcyjnego.
- Procesy związane ze zmiennymi bazowymi danego rozwiązania bazowego to procesy aktywne, pozostałe to procesy, które mogą stać się aktywne, jeżeli zmieni się któryś warunków (na przykład technologia, cena, itp.).
- Wartości optymalne zmiennych decyzyjnych zadania dualnego są miarą efektywności krańcowej wyrazów wolnych zadania prymalnego względem optymalnej wartości funkcji celu przy układzie warunków, jakie reprezentuje model. Nazywamy je cenami dualnymi – to znaczy nie są to faktyczne ceny jednostki zasobów i -tego środka, za którą zostaną nabyte przez zakład, lecz są efektywnością krańcową zasobów tego środka w stosunku do optymalnej wartości funkcji celu przy warunkach zadania. Oznacza to, że podają one zmianę wartości funkcji celu, jaka będzie mieć miejsce, gdy zasoby i -tego środka wzrosną o jednostkę. Można zatem zauważyć, że dobór cen dualnych minimalizuje łączną wycenę rozmiarów zasobów poszczególnych ograniczeń.

¹⁴ Poniższa interpretacja bazuje na pracy: I. Nykowski: *Programowanie liniowe*, Część I, SGPiS, Warszawa, 1972, s. 170 i dalsze. W pracy tej znaleźć można bardzo szerokie spektrum zagadnień z programowania liniowego.

ZADANIA DO ROZDZIAŁU 3

3.1. Ułóż ZPL maksymalizujące zysk, mając dla zakładu krawieckiego następujące dane:

Produkcja – wyroby	X_1 spodnie	X_2 marynarki	X_3 kamizelki	X_4 koszule
Zysk jednostkowy	80	150	120	40
Zużycie jednostkowe tkaniny A	2	2	1	-
Zużycie jednostkowe tkaniny B	1	1	1	2
Zużycie jednostkowe pracy (rh)	2	6	3	1

wiedząc ponadto, że możliwe kwartalne dostawy tkaniny A wynoszą 1.500 m., tkaniny B – 1.000 m, a zakład dysponuje sześcioma pracownikami, co daje miesięcznie około 1.000 roboczogodzin. Ponadto zamówiono już 300 koszul. Liczba spodni musi być dwukrotnie wyższa od liczby marynarek. Zwykle co piąty klient kupujący marynarkę kupuje również kamizelkę.

3.2. Co to jest gradient funkcji i warstwica. Policz gradient funkcji $f(x) = -x_1 + 2x_2$. Napisz równanie warstwicy przechodzącej przez punkt (2,8)?

3.3. Przedstaw graficznie rozwiązanie ZPL i znajdź postać standardową ZPL:

$$\text{Max } f(x) = -2x_1 + 4x_2$$

p.w.

$$3x_1 + x_2 \geq 3$$

$$5x_1 - 2x_2 \leq 20$$

$$-x_1 + 6x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

3.4. Znajdź postać standardową i startowe rozwiązanie bazowe ZPL:

$$\text{Max } f(x) = x_2 + 3x_3 + 2x_5 + 4x_6$$

p.w.

$$-3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 12$$

$$x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 3$$

$$4x_1 + x_2 + x_5 + x_6 = 7$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0,$$

3.5. Znaleźć metodą Simplex i graficznie rozwiązanie ZPL:

$$\text{Max } f(x) = 5x_1 + 5x_2$$

p.w.

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$4x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

3.6. Znaleźć metodą Simplex rozwiązanie ZPL

$$\text{Max } f(x) = 2x_1 - 4x_2$$

p.w.

$$2x_1 + x_2 \leq 14$$

$$x_1 - x_2 \leq 4$$

$$10x_1 + 2x_2 \geq 16$$

$$x_1 \geq 0,$$

Wskazówka. Zwróć uwagę na to, że tylko jedna zmienna jest nie-ujemna.

3.7. Znajdź wszystkie rozwiązania optymalne ZPL:

$$\text{Max } f(x) = 2x_1 + 2x_2$$

p.w.

$$4x_1 + 4x_2 \leq 80$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 20$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Rozwiązaniem jest odcinek łączący punkty [15, 10] oraz [0, 20].

		c_j	2	2	0	0	WW
c_j^B	Baza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	80	4	4	1	0	20
0	x_4	20	2	-2	0	1	10
		0	-2	-2	0	0	

			2	2	0	0	
			x1	x2	x3	x4	
0	x3	40	0	8	1	-2	5
2	x1	10	1	-1	0	0,5	
		20	0	-4	0	1	

			2	2	0	0	
			x1	x2	x3	x4	
2	x2	5	0	1	0,125	-0,25	
2	x1	15	1	0	0,125	0,25	60
		40	0	0	0,5	0	

			2	2	0	0	
			x1	x2	x3	x4	
2	x2	20	1	1	0,25	0	20
0	x4	60	4	0	0,5	1	15
		40	0	0	0,5	0	

3.8. Przedstaw w postaci standardowej i macierzowej ZPL

$$\max f(x) = 2x_1 - x_2 + 4x_3$$

p.w.

$$x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_3 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 4.$$

3.9. Rozwiąż metodą Simplex i graficznie ZPL

$$\max f(x) = 2x_1 + 3x_2$$

p.w.

$$2x_1 + 3x_2 \leq 14$$

$$x_1 - x_2 \leq 4$$

$$3x_1 - 5x_2 \geq -5$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

3.10. Zapisz i rozwiąż zadanie dualne do ZPL:

$$\text{Max } f(x) = 2x_1 + 2x_2$$

p.w.

$$4x_1 + 4x_2 \leq 80$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 20$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Wskazówka: Zauważ, że zadanie polega na znalezieniu rozwiązania do zadania 3.7. Porównaj rozwiązania. Zauważ, że w przypadku minimalizacji funkcji celu (zadanie dualne) rozwiązanie optymalne jest wówczas, gdy wskaźniki optymalności są niedodatnie.

		0	80	20	0	0	M	M	WW
	baza	b	y1	y2	y3	y4	y5	y6	
M	y5	2	4	2	-1	0	1	0	0,5
M	y6	2	4	-2	0	-1	0	1	0,5
		4M	8M - 80	-20	-M	-M	0	0	

	baza	b	y1	y2	y3	y4	y5	y6	
80	y1	0,5	1	0,5	-0,25	0	0,25	0	
M	y6	0	0	-4	1	-1	-1	1	0
		40	0	-4M + 20	M - 20	-M	-M + 20	0	

	baza	b	y1	y2	y3	y4	y5	y6	
80	y1	0,5	1	-0,5	0	-0,25	0	0,25	
0	y3	0	0	-4	1	-1	-1	1	0
		40	0	-60	0	-20	-M	-M + 20	

3.11 Znajdź rozwiązanie ZPL:

$$\text{Max } f(x) = 3x_1 + 4x_2 + x_5$$

p.w.

$$6x_1 + x_3 + 4x_5 = 12$$

$$5x_1 + 5x_2 - 10x_4 + x_5 = 15$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Jak zmieni się rozwiązanie optymalne, jeżeli:

- a) zysk jednostkowy na wyrobie 3 będzie wynosił 2? Przeanalizuj zachowanie się zysku w zależności od wysokości zysku na wyrobie 3.
- b) pierwszego surowca można pozyskać dwukrotnie więcej, to jest 24 tony?
- c) nastąpi zmiana współczynników materiałochłonności w procesie 5 i wynosić one będą

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

zamiast dotychczasowych

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rozdział 4

ZADANIE TRANSPORTOWE PROGRAMOWANIA LINIOWEGO

4.1. SFORMUŁOWANIE ZADANIA TRANSPORTOWEGO

Zadanie programowania liniowego może nastręczyć wiele problemów, zwłaszcza czasowych, jeżeli jest zadaniem bardzo rozbudowanym. Dlatego dla zadań o wielu warunkach czy wielu zmiennych proponowane są algorytmy dające możliwość rozwiązania zadania szybciej i efektywniej. Do takich zadań zaliczane jest tak zwane Zadanie Transportowe [ZT]. Ma ono bowiem charakterystyczną postać, która pozwala na dokonanie uproszczeń w procesie wyznaczania rozwiązania optymalnego. ZT może być stosowane w wielu sytuacjach związanych z logistyką dostaw, ale również z określeniem tras autobusów i czasów odjazdu, zmianą linii itp.

ZT zakłada, że mamy do czynienia z pewnym jednorodnym towarem lub grupą towarów stanowiących jeden moduł transportowy (np. przejazd samochodu ciężarowego z transportem wody mineralnej, kurs autobusu na dowolnej trasie) w określonym czasie (np. godziny porannego szczytu, jeden dzień, tydzień, miesiąc). Ponadto zakładamy, że w analizowanym czasie na określonym terenie (np. miasto, województwo, kraj):

- występuje m dostawców,
- każdy dostawca dysponuje znanymi zasobami towaru. Pierwszy dostawca ma a_1 , drugi a_2 , i ostatni a_m ($a_i > 0$) tego samego towaru,
- istnieje n odbiorców,
- odbiorcy zgłaszają zapotrzebowanie na ten towar odpowiednio w ilościach: $b_1, b_2, \dots, b_n$ ($b_j > 0$),
- określone są współczynniki c_{ij} określające koszt przewozu jednostki towaru na trasie od i -tego dostawcy do j -tego odbiorcy.

Problem ZT polega na tym, by wyznaczyć wielkość przewozów (macierz o wymiarach $m \times n$ i o elementach nieujemnych, określających wielkość przewozów od każdego dostawcy do każdego odbiorcy), aby ten układ dostaw zapewniał najniższy łączny koszt przewozów¹.

Jeżeli szukaną wielkość dostawy od dostawcy i -tego do odbiorcy j -tego oznaczmy przez x_{ij} ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$), to model w zapisie programowania liniowego ma następującą postać:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min ,$$

przy warunkach:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n)$$

W ZT wymagać będziemy ponadto zbilansowania² podaży i popytu, czyli dołączony zostanie warunek:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j .$$

W powyższym układzie równań pierwsze m warunków przedstawia rozdział zasobów każdego dostawcy pomiędzy wszystkich odbiorców, następne n warunków przedstawia bilans dostaw od wszystkich dostawców do poszczególnych odbiorców, a ostatnia równość jest zbilansowaniem stanu magazynów ze stanem potrzeb.

Rozwiązanie powyższego układu nie jest prezentowane w postaci tablicy Simplex, lecz macierzy o m wierszach i n kolumnach, to znaczy:

¹ Innym rodzajem, wspomnianym dalej, jest zagadnienie minimalizujące czas przewozu

² Zbilansowanie ZT jest pierwszym krokiem w algorytmie.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Współczynniki funkcji celu (koszty przewozu) mają również postać:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Wartość funkcji celu jest po prostu sumą iloczynów odpowiednich elementów obu macierzy, to znaczy

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} .$$

PRZYKŁAD 4.1. Zapisz dowolne zadanie transportowe, w którym jest 3 dostawców i 4 odbiorców.

Problem zadania transportowego można napisać w postaci:

Zminimalizuj łączne koszty przewozu pomiędzy dostawcami i odbiorcami przy następujących danych:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 100 & 150 & 150 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

gdzie macierzą $\mathbf{C}$ – kosztów przewozu jest:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

wektorem dostaw $\mathbf{A}$ (trzech dostawców) jest

$$\begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix}$$

a wektorem odbiorców B^T (czterech odbiorców)

$$\begin{bmatrix} 200 & 100 & 150 & 150 \end{bmatrix}$$

Dodatkowo w ostatniej kolumnie i ostatnim wierszu pokazano łączną liczbę towarów. 600 jest równa suma stanu magazynów i suma popytu zgłaszanego przez odbiorców. Zapis ten oznacza między innymi, że:

- koszt przewozu jednej jednostki pomiędzy dostawcą o numerze 2 i odbiorcą o numerze 3 wynosi 2 (np. 200 zł),
- drugi dostawca dysponuje 300 jednostkami towaru,
- trzeci odbiorca zgłasza popyt w wysokości 150 jednostek.

Rozwiązaniem zadania będzie każda prostokątna macierz o trzech wierszach i czterech kolumnach, która spełnia warunki zadania, czyli na przykład rozwiązanie X_1 będzie się równać:

$$\begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 50 & 50 \end{bmatrix}$$

Każdą prostokątną macierz X o wymiarach $m \times n$ i nieujemnych elementach, spełniających ponadto warunki poboczne wynikające z treści zadania, będziemy nazywali rozwiązaniem dopuszczalnym zadania transportowego. Wewnętrzną część tablicy pokazanej w przykładzie będziemy nazywali macierzą kosztów³. Wielkości zasobów w magazynach: $a_1, \dots, a_m$ wypisane są w ostatniej kolumnie a wielkości zapotrzebowań $b_1, \dots, b_n$ wypisane w ostatnim wierszu tablicy.

W każdym zbilansowanym zadaniu transportowym istnieje skończone rozwiązanie optymalne. Proces poszukiwania rozwiązań optymalnych ogranicza się w algorytmie transportowym do zbioru dopuszczalnych rozwiązań bazowych tego zadania. Oznacza to, że podobnie jak poprzednio w ZPL będziemy mieć zmienne bazowe (których jest $m + n - 1$) oraz zmienne niebazowe przybierające wartość 0. Wynika to stąd, że w zbilansowanym zadaniu transportowym zespół warunków ograniczających składa się z układu $m + n$ równań. Dokładnie jedno, dowolne, spośród tych $m + n$ równań jest kombinacją liniową pozostałych. Oznacza to, że układ składa się z $m+n-1$ równań liniowo-niezależnych. Dlatego należy zapamiętać uwagę:

Uwaga 1. Każde rozwiązanie bazowe zbilansowanego zadania transportowego ma dokładnie $m + n - 1$ zmiennych bazowych.

³ W alternatywnych zadaniach może tam być odległość (minimalizujemy wówczas sumę przebiegów samochodów, albo czas, wówczas minimalizujemy czas dostaw.

4.2. BILANSOWANIE ZADANIA TRANSPORTOWEGO

Zgodnie z uwagami wcześniejszymi, algorytm transportowy wymaga równowagi popytu i podaży, co zapisaliśmy wzorem

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Jednakże wiele zadań nie ma a priori spełnionego tego warunku. Dlatego pierwszym krokiem jest bilansowanie ZT. Najogólniej można napisać, iż oznacza ono:

- dodanie „wirtualnego” czy „fikcyjnego” odbiorcy, gdy w magazynach jest więcej niż chcą dostawcy, lub
- dodanie „wirtualnego” dostawcy, gdy popyt przekracza podaż.

W pierwszym przypadku dodajemy kolumnę, w której musimy wpisać w ostatnim wierszu (wiersz popytu zgłaszanego przez odbiorców) liczbę, której dodanie do dotychczasowego popytu spowoduje równowagę z podażą. W kolumnie macierzy kosztów C wpisujemy faktyczne wartości kosztów magazynowania. „Wirtualny” odbiorca oznacza bowiem pozostawienie towaru w magazynie⁴.

PRZYKŁAD 4.2. Zbilansuj następujące ZT, wiedząc, że koszty magazynowania jednej jednostki towaru wynoszą u każdego dostawcy (w każdym magazynie) 5. Co oznacza w tym przypadku wystąpienie „niezerowego przewozu” do fikcyjnego odbiorcy?

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 100 & 150 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - \end{bmatrix}$$

Jak łatwo widać, w magazynach jest 600 jednostek a odbiorcy chcą jedynie 500. Oznacza to, że w magazynach pozostanie 100 sztuk. Wprowadzamy dodatkowego „fikcyjnego” odbiorcę, który potrzebować będzie 100 sztuk. Wówczas zadanie jest zbilansowane:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 100 & 150 & 50 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

⁴ Jeżeli nie są znane koszty magazynowania, to w kolumnie wpisujemy 0, jako koszt przewozu rozumiemy pozostawienie towaru na miejscu, bez ponoszenia kosztów.

Jeżeli w rozwiązaniu bazowym wystąpi niezerowy „przewóz” na trasie do piątego odbiorcy, to jest to równoznaczne z pozostawieniem towaru w magazynie, który ów „przewóz” będzie wykonywał.

PRZYKŁAD 4.3. Zbilansuj następujące ZT, wiedząc, że żaden z odbiorców nie jest uprzywilejowany w stosunku do innych.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 100 & 150 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - \end{bmatrix}$$

I w tym przypadku zadanie nie zostało zbilansowane. Tym razem dostawcy mają łącznie 600, ale odbiorcy chcą 700. Oznacza to, że należy wyznaczyć fikcyjnego dostawcę. „Dostawa” od tego dostawcy oznacza brak towaru u odbiorcy. Przykładem takiego zbilansowania jest rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 100 & 150 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 700 \end{bmatrix}$$

Odbiorca, który otrzyma towar od czwartego dostawcy, będzie miał potrzeby niezaspokojone dostawami. Podaż jest niższa niż potrzeby⁵. Oznacza to, że „przewóz” na tej trasie w rozwiązaniu bazowym jest równoznaczny z brakiem towaru u odbiorcy.

4.3. METODY WYZNACZANIA ROZWIĄZAŃ WSTĘPNYCH

Bilansowanie zadania jest pierwszym krokiem w algorytmie ZT. Krok drugi, jakim jest znalezienie pierwszego bazowego rozwiązania dopuszczalnego, jest podobny do szukania standardowego rozwiązania bazowego w ZPL. W przypadku ZT mamy jednak równania i wiemy, że zadanie jest zbilansowane oraz, że ma rozwiązanie. Etap ten polega na wyznaczeniu pewnego dopuszczalnego rozwiązania bazowego. Rozwiązanie to pozwoli na rozpoczęcie algorytmu transportowego.

⁵ W takim przypadku można również proporcjonalnie obniżyć popyt, co odpowiada zjawisku reglamentacji.

Istnieje wiele sposobów wyznaczania wstępnego rozwiązania bazowego. Celem tych metod jest – wraz z komplikacją – znalezienie rozwiązania leżącego blisko rozwiązania optymalnego. W ten sposób eliminuje się iteracje, które później trzeba byłoby wykonać, jeżeli rozwiązanie początkowe byłoby odległe od optimum. Dlatego też poniżej zostaną zaprezentowane 3 różne sposoby szukania pierwszego rozwiązania bazowego, posiadającego $n + m - 1$ wartości różnych od zera⁶. Z reguły pierwsza metoda pozostawia do wykonania najwięcej iteracji.

4.3.1. Metoda kąta północno-zachodniego [MKPZ]

Nazwa metody pochodzi od miejsca wyboru kolejnych zmiennych bazowych. Tablica ZT stanowi tabelę przypominającą mapę. Jak wskazuje nazwa metody, przewozami bazowymi stają się te, które znajdują się w górnym wierszu i pierwszej kolumnie z lewej strony. Pierwszym elementem jest oczywiście przewóz na trasie od pierwszego dostawcy do pierwszego odbiorcy. Temu przewozowi nadajemy wartość zgodnie ze stosowaną na każdym kroku zasadą:

$$x_{ij} = \min \{a_i, b_j\},$$

co oznacza, że wybieramy mniejszą z wielkości:

- aktualny stan magazynu i-tego,
- aktualna potrzeba odbiorcy j-tego.

Pierwszy krok oznacza, że wybieramy dla x_{11} wartość mniejszą z dwóch: magazyn a_1 , odbiorca b_1 . Oznacza to, że po dokonaniu tego przewozu możemy mieć do czynienia z sytuacją:

- pierwszy dostawca już więcej towaru nie ma (x_{11} równa się bowiem a_1),
- pierwszy odbiorca już więcej nie ma (x_{11} równa się bowiem b_1).

W pierwszym przypadku nie rozpatrujemy pierwszego wiersza, wpisując kropki w pozostałe trasy. Jednocześnie zmniejszamy zapotrzebowanie pierwszego odbiorcy. Pierwszą i kolejne iteracje ilustruje przykład:

PRZYKŁAD 4.4. Znajdź startowe rozwiązanie bazowe MKPZ w ZT:

$$\begin{bmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

⁶ Często zdarza się, że również przewóz bazowy równa się 0. W takim przypadku to zero jest zerem bazowym. Jest ono pisane właśnie jako 0, podczas gdy zera niebazowe oznaczamy kropką •.

Rozwiązanie zadania tą metodą dogodnie jest prowadzić bez macierzy kosztów. Dlatego pozostawiono w jako wolne miejsce używane zwykle do zapisania macierzy kosztów. Startowe rozwiązanie w tym przypadku nie zależy bowiem od wysokości kosztów a jedynie od ustalenia pierwszej trasy przewozu. W MKPZ nie uwzględnia się w pierwszym rozwiązaniu kosztów. Zgodnie z zapisem wybieramy minimum z liczb $a_1 = 300$ oraz $b_1 = 200$. Przewóz na trasie x_{11} jest zatem równy 200. Pokazuje to następujący układ:

$$X_1^B = \begin{bmatrix} 200 & & & \\ \bullet & & & \\ & \bullet & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bullet & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \end{bmatrix}$$

Po otrzymaniu 200 jednostek od pierwszego dostawcy, odbiorca pierwszy nie chce więcej towaru. Dlatego w dolnym wierszu znajduje się kropka. W pierwszym magazynie jest jeszcze do dostarczenia innym odbiorcom 100 jednostek. W kolejnym kroku rozpatrujemy część macierzy bez elementów bazowych (już wypełnionych) oraz bez elementów z kropkami. Przewóz spełniający warunek kąta północno zachodniego odpowiada trasie od pierwszego dostawcy do drugiego odbiorcy. Kierując się tą samą zasadą wybieramy minimum z liczb $a_1' = 100$ oraz $b_1' = 200$. Zatem $x_{12} = 100$. Tym razem przewóz oznacza brak towaru w magazynie 1. Dlatego zostały w pierwszym wierszu zaznaczone kropki:

$$X_1^B = \begin{bmatrix} 200 & 100 & \bullet & \bullet \\ \bullet & & & \\ \bullet & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bullet & 100 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \end{bmatrix}$$

Drugi odbiorca chce jeszcze 100 jednostek towaru. Po tej operacji kąt północno zachodni oznacza przewóz na trasie od drugiego dostawcy do drugiego odbiorcy. Kolejne, dokonane w sposób identyczny kroki pokazano w tabelach poniżej:

$$X_1^B = \begin{bmatrix} 200 & 100 & \bullet & \bullet \\ \bullet & 100 & & \\ \bullet & \bullet & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \end{bmatrix}$$

następnie:

$$X_1^B = \begin{bmatrix} 200 & 100 & \bullet & \bullet \\ \bullet & 100 & 100 & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \end{bmatrix}$$

W tym przypadku 100 jednostek posiadał zarówno magazyn 2 jak i chciał odbiorca 3. Wpisanie przewozu $x_{23}=100$ pociągnęło za sobą wpisanie kropek w wierszu drugim. Nie jest jednak możliwe wpisanie jednocześnie kropek zarówno w wierszu jak i w kolumnie⁷. Dlatego trzeci odbiorca chce jeszcze 0 jednostek. Trasa ta oczywiście nie będzie obsługiwana, jeżeli nie wzrośnie stan magazynu drugiego i zapotrzebowanie trzeciego odbiorcy.

Kolejne kroki dają następujące rozwiązanie:

$$X_1^B = \begin{bmatrix} 200 & 100 & \bullet & \bullet \\ \bullet & 100 & 100 & \bullet \\ \bullet & \bullet & 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \end{bmatrix}$$

Jest to startowe rozwiązanie bazowe uzyskane MKPZ.

4.3.2. Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów [MMEMK]

Podobnie do poprzedniej metody będziemy dla określenia wartości przewozu bazowego x_{ij} korzystali z minimum a_i oraz b_j . Tym razem przewóz bazowy będzie wybierany według kolejnego minimalnego elementu macierzy kosztów. Metoda zostanie pokazana na przykładzie:

PRZYKŁAD 4.5. Znajdź startowe rozwiązanie bazowe MMEMK w ZT:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

W pierwszym kroku szukamy trasy z minimalnym kosztem przewo-

⁷ W przeciwnym przypadku nie będzie $n+m-1$ elementów bazowych. W powyższym przypadku jeden bazowy element będzie równy 0. Mówimy wówczas o rozwiązaniu zdegenerowanym, czyli takim, w którym zero równa się przewóz bazowy.

zu towarów. Chcemy, by na trasach o minimalnych kosztach był maksymalny możliwy przewóz. Dla podanej tabeli najtaniej wozi się na trasie od drugiego dostawcy do drugiego odbiorcy, gdyż $c_{22} = 1$. Znajdujemy minimum z a_2 i b_2 . Zatem $x_{22} = 200$. Podobnie do poprzedniego przypadku wpisujemy kropki w wierszu drugim oraz zero u drugiego odbiorcy. Tablica wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} \bullet & 200 & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ \bullet \\ 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ \bullet \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 0 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 & 0 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \end{bmatrix}$$

Po skreśleniu elementów drugiego wiersza minimalny element to $c_{31} = c_{33} = 2$. Wybieramy (zgodnie z poprzednią zasadą) element z lewej tablicy. Przewóz od trzeciego dostawcy do pierwszego odbiorcy $x_{31} = 100$. Daje to w konsekwencji zmiany:

$$\begin{bmatrix} \bullet & 200 & \bullet & \bullet \\ 100 & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 100 & 0 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & 0 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \end{bmatrix}$$

Ostatni wiersz wypełniamy zgodnie z tą samą zasadą. W wyniku tych operacji otrzymamy startowe rozwiązanie bazowe MMEMK:

$$\begin{bmatrix} 100 & 0 & 100 & 100 \\ \bullet & 200 & \bullet & \bullet \\ 100 & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \end{bmatrix}$$

Łatwo widać, że jest sześć wyróżnionych elementów, co odpowiada równości $n+m-1$.

MMEMK jest najbardziej zbliżona do praktycznego sposobu ustalania przewozów. W praktyce uwzględnia się bowiem koszty przewozu c_{ij} . Może się jednak zdarzyć, że początkowy wybór niskiego kosztu pociąga za sobą wysoki koszt w następnym czy końcowym przewozie. Dlatego też poniżej pokazano jedną z tych metod, które uwzględniają wybór warunkowy, uwzględniający oddziaływanie na wybór kolejnych zmiennych bazowych w procesie obliczeniowym.

4.3.3. Metoda VAM⁸ [VAM]

Metoda VAM daje możliwość warunkowego wyboru tras przewozowych, kierując się nie tylko minimalnym kosztem w danej iteracji ale także ewentualnymi kosztami przyszłymi. Sposób postępowania przy wyborze wielkości przewozów jest bardzo podobny do obu poprzednich metod. Inne jest jedynie kryterium wyboru trasy.

Wybór trasy (zmiennej bazowej) odbywa się w następujący sposób:

1. Dla każdego wiersza i dla każdej kolumny macierzy kosztów C oblicza się różnice między dwoma najmniejszymi elementami tego wiersza lub tej kolumny. Tak obliczone różnice zapisujemy obok wierszy i kolumn,
2. Wybieramy wiersz lub kolumnę, dla której różnica jest największa,
3. Jako trasę wyróżnioną (zmienną bazową) przyjmuje się tę, której odpowiada najmniejszy spośród elementów wybranego wiersza lub kolumny
4. Wybranej trasie przydzielamy możliwy przewóz $x_{ij} = \max \{a_i, b_j\}$

Tę procedurę kontynuujemy aż do momentu znalezienia pierwszego rozwiązania startowego. Warto zauważyć, że i w tym przypadku kierujemy się często zasadą przyjętą w MKPZ, mówiącą, iż w przypadku gdy największa różnica odpowiada kilku wierszom i kolumnom, wówczas wyróżniamy najwyżej leżący wiersz, a spośród kolumn tę, która jest wysunięta najbardziej w lewo. Zasada ta wynika z przedstawionej jako pierwsza Metody Kąta Północno-Zachodniego. Porządkuje ona sposób postępowania, chociaż nie ma wpływu na szybkość znajdowania rozwiązania optymalnego.

PRZYKŁAD 4.6. Znajdź startowe rozwiązanie bazowe metodą VAM dla poniższego ZT:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

Wygodnie jest, tak jak poprzednio, poprowadzić algorytm przy pomocy dwóch macierzy. W pierwszej będzie rozwiązanie a w drugiej obliczanie różnic. W pierwszym kroku maksymalna różnica występuje

⁸ Nazwę tworzą pierwsze litery tytułu tej metody w języku angielskim: *Vogel's Approximation Method*, której autorem był W.R. Vogel

w drugiej kolumnie. Dlatego minimalnemu elementowi w tej kolumnie przyporządkujemy wartość 200:

$$\begin{bmatrix} \bullet & 200 & \bullet & \bullet \\ 200 & 0 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ \bullet \\ 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 0 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

W kolejnej iteracji szukamy różnic, ale nie uwzględniamy już skreślonych elementów macierzy kosztów. Maksymalną różnicą jest pojawiająca się wielokrotnie 1. Zgodnie z zasadą wybieramy pierwszą kolumnę, w której minimalnym elementem jest 2, leżące na trasie pomiędzy trzecim dostawcą a pierwszym odbiorcą.

$$\begin{bmatrix} \bullet & 200 & \bullet & \bullet \\ 100 & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 100 & 0 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

W kolejnej iteracji otrzymujemy rozwiązanie bazowe:

$$\begin{bmatrix} 200 & \bullet & 100 & \bullet \\ \bullet & 200 & \bullet & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

4.4. OBLICZANIE WSKAŹNIKÓW OPTYMALNOŚCI METODĄ POTENCJAŁÓW

Rozwiązanie bazowe uzyskane dowolną, przedstawioną powyżej, metodą jest pierwszym dopuszczalnym rozwiązaniem bazowym (w ZPL odpowiada mu rozwiązanie standardowe). Należy zatem sprawdzić, czy jest ono optymalne, a jeżeli nie to należy zaproponować schemat znalezienia rozwiązania sąsiedniego, zmniejszającego wartość funkcji celu.

O optymalności danego rozwiązania bazowego decydują wartości wskaźników optymalności obliczone dla tego rozwiązania. Wskaźniki dla zmiennych niebazowych zestawiane są w formie macierzy, zwanej

macierzą „zerową”. Uzyskujemy ją, jako macierz której elementy wyliczone są z wzoru:

$$k_{ij} = z_{ij} - c_{ij} = -(c_{ij} + u_i + v_j) \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n).$$

gdzie u_i oraz v_j są tak zwanymi potencjałami, przyporządkowanymi wierszom (u_i) oraz kolumnom (v_j). Są to dowolne liczby rzeczywiste (całkowite) tak dobrane, aby współczynniki przy zmiennych bazowych w poniższym równaniu spełniały warunek:

$$c_{ij} + u_i + v_j = 0 \quad (i, j) \in B$$

gdzie: **B** jest zbiorem tras bazowych rozwiązania X_B .

Rozwiązanie X_B jest optymalne, jeżeli wszystkie elementy macierzy zerowej są nieujemne⁹. Natomiast rozwiązanie X_B nie jest rozwiązaniem optymalnym, gdy dla co najmniej jednej zmiennej x_{ij} :

$$k_{ij} = c_{ij} + u_i + v_j < 0$$

W przypadku, gdy jakiś wskaźnik optymalności (element macierzy zerowej) jest ujemny, należy wprowadzić do bazy nowy przewóz i jednocześnie jeden z dotychczasowych przewozów wyrugować z bazy. Do bazy w następnym rozwiązaniu bazowym wchodzi przewóz wyznaczony przez ujemny wskaźnik optymalności o największej wartości bezwzględnej.

Do wyznaczenia szukanych wartości potencjałów u_i (jest ich m) oraz wartości potencjałów v_j (jest ich n) należy rozwiązać układ $m + n - 1$ równań. Żadne z równań tego układu nie jest kombinacją liniową innych równań tego układu. Liczba równań jest o jeden mniejsza od liczby niewiadomych, a zatem jest to układ równań o jednym stopniu swobody. Tak więc istnieje nieskończenie wiele rozwiązań układu, chyba, że zostanie wybrana wartość którejkolwiek zmiennej. W takim przypadku układ będzie miał jednoznaczne rozwiązanie. W praktyce jednej ze zmiennych (potencjałów) będziemy przyporządkowywać wartość zero. Pozwoli to na wyliczenie pozostałych potencjałów i w dalszej kolejności macierzy zerowej.

PRZYKŁAD 4.7. Sprawdź czy startowe rozwiązanie bazowe uzyskane metodą VAM dla ZT jest optymalne:

⁹ Wynika to z faktu przeciwnego znaku w elementach macierzy zerowej i wskaźników optymalności w programowaniu liniowym. Z tego względu, iż w ZT mamy do czynienia z minimalizacją, wskaźniki (poza bazowymi) powinny być dodatnie, by istniało optimum (nieujemne, by istniały optima).

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

Uzyskane w przykładzie 5 startowe rozwiązanie bazowe miało postać:

$$\begin{bmatrix} 200 & \bullet & 100 & \bullet \\ \bullet & 200 & \bullet & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

W pierwszym kroku liczy się potencjały, przyjmując jako zero ten potencjał, który występuje najczęściej. W powyższym przypadku dwukrotnie występuje kilka potencjałów, dlatego też wybrany zostanie potencjał dla pierwszego wiersza. Przewozy bazowe zostały zaznaczone ciemniejszym tłem. Z sumy $c_{ij} + u_i + v_j = 0$ łatwo wyznaczyć potencjał w pierwszej kolumnie (-4) oraz w kolumnie trzeciej (-3),

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ -4 & & -3 & \end{bmatrix} 0$$

Wynika to z faktu, iż podstawiając dwukrotnie do równania:

$$c_{ij} + u_i + v_j = 0$$

potencjał ($u_1 = 0$) oraz koszt przewozu, możemy wyliczyć drugi potencjał:

$$4 + 0 + v_1 = 0 \quad 3 + 0 + v_3 = 0.$$

W rzeczywistości rachunek ten nie odbywa się przez rozwiązywanie równań, lecz przez wyliczenie w pamięci wartości potencjału, by suma przedstawiona równaniem była równa zero. W następnej kolejności można wyznaczyć potencjał u_3 z równania:

$$c_{31} + u_i + v_1 = 0.$$

$$\text{Oczywiście } u_3 = 2.$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ -4 & & -3 & \end{array} \right] \begin{array}{l} 0 \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

W dalszej kolejności wyznaczyć można $v_4 = -5$, a przy jego pomocy $u_2 = 3$. Za pomocą tego ostatniego potencjału można wreszcie wyznaczyć $v_2 = -4$. Tablica z potencjałami wygląda zatem:

$$\left[\begin{array}{cccc} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -3 & -5 \end{array} \right] \begin{array}{l} 0 \\ 3 \\ 2 \end{array}$$

Na podstawie wyliczonych potencjałów i macierzy kosztów wyznaczyć można wszystkie elementy macierzy zerowej. Zostały one przedstawione w tabeli poniżej. Występowanie elementów ujemnych w macierzy zerowej oznacza, że rozwiązanie nie jest optymalne. Do bazy w następnym rozwiązaniu bazowym wchodzi przewóz o ujemnym wskaźniku optymalności i największej wartości bezwzględnej tego wskaźnika.

$$\left[\begin{array}{cccc} \bullet & 1 & \bullet & -1 \\ 2 & \bullet & 6 & \bullet \\ \bullet & 2 & 1 & \bullet \\ -4 & -4 & -3 & -5 \end{array} \right] \begin{array}{l} 0 \\ 3 \\ 2 \end{array}$$

Każdy element został wyznaczony z wzoru:

$$k_{ij} = c_{ij} + u_i + v_j$$

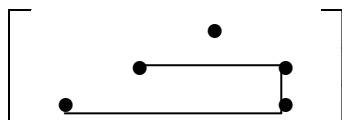
Elementy bazowe są oczywiście równe zero, a dla ich wyróżnienia zostały przedstawione w formie kropek. Jak łatwo widać jeden element w macierzy jest ujemny, co oznacza, że rozwiązanie nie jest optymalne. Metodę szukania sąsiedniego rozwiązania pokazano w następnej części.

4.5. SZUKANIE ROZWIĄZANIA OPTYMALNEGO PRZY POMOCY METODY GRAFÓW I POTENCJAŁÓW

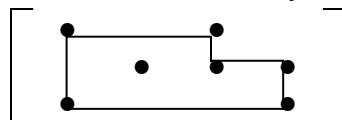
Jak wcześniej napisano, w rozwiązaniu bazowym występuje $n + m - 1$ elementów. Do kolejnego rozwiązania musi wejść element, którego wskaźnik optymalności jest ujemny. Aby zachować tę samą liczbę elementów bazowych należy jeden z dotychczasowych bazowych elementów wyrugować z bazy. Wygodnie jest to robić za pomocą grafu. Wcześniej poznamy kilka użytecznych definicji.

Parę wskaźników (i, j) dowolnego elementu a_{ij} macierzy przewozów $\mathbf{A}$, będziemy nazywali węzłem (i, j) tej macierzy. Węzeł (i, j) , odpowiadający przewozowi x_{ij} określa miejsce w macierzy przewozów $\mathbf{A}$. Węzły w wierszu lub kolumnie wyznaczają linie. Zbiór węzłów $\{(i, j): j = 1, \dots, n\}$ będziemy nazywali i -tą linią poziomą macierzy $\mathbf{A}$, a zbiór $\{(i, j): i = 1, \dots, m\}$ – j -tą linią pionową tej macierzy.

Zbiór węzłów wyróżnionych w rozwiązaniu macierzowym nazywamy zbiorem spójnym, jeżeli dowolne dwa węzły zbioru można połączyć, łącząc węzły w liniach (wierszach lub w kolumnach). Zbiór nie jest spójny, gdy chociaż jeden węzeł jest izolowany, to znaczy, że nie można go połączyć odcinkiem w danej linii z drugim węzłem, tak jak poniżej izolowany jest węzeł $(1, 3)$. Pozostałe węzły można połączyć w linii odcinkami. Odcinki nie mogą przebiegać ukośnie.



Cykl to zbiór odcinków łączących węzły, tworzący drogę zamkniętą, złożoną z węzłów i to takich, że z danej linii mogą wchodzić do cyklu dwa albo zero węzłów. Cykl został pokazany poniżej:



Łatwo jest zauważyć, że wskaźniki zmiennych bazowych każdego dopuszczalnego rozwiązania bazowego $\mathbf{X}_b$ wyznaczają zbiór węzłów $m + n - 1$ elementowy, który jest spójny i nie zawiera cyklu. Dołożenie do rozwiązania bazowego jednego węzła powoduje, że ma ono $m + n$ elementów i zawiera cykl.

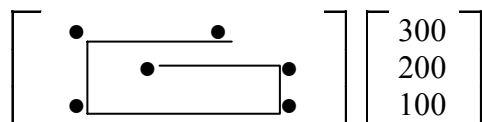
PRZYKŁAD 4.8. Pokaż graf rozwiązania bazowego z przykładu 6 oraz cykl po dodaniu przewozu $(1, 4)$

Rozwiązanie bazowe o $n + m - 1$ elementach, uzyskane metodą VAM miało postać:

$$\left[\begin{array}{cccc} 200 & \bullet & 100 & \bullet \\ \bullet & 200 & \bullet & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet & 100 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 300 \\ 200 \\ 100 \end{array} \right]$$

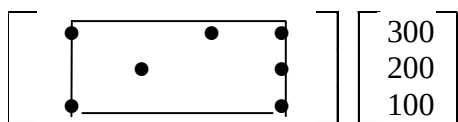
$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

Graf tego rozwiązania nie tworzy cyklu:



$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

Do bazy w następnym rozwiązaniu bazowym wchodzi przewóz o ujemnym wskaźniku optymalności i największej wartości bezwzględnej tego wskaźnika. Jednak dołożenie węzła (1, 4) powoduje, że powstaje cykl. Oczywiście zawiera on jedynie elementy narożne, czyli w skład cyklu nie wchodzi węzeł (1, 3) i nie wchodzi węzeł (2, 4):



$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

Wraz z dołożeniem węzła (1, 4) nastąpił wzrost liczby elementów do $n + m$, co oznacza, że rozwiązanie bazowe uzyska się, po usunięciu jednego z elementów dotychczas bazowych. Wykorzystamy w tym celu graf. Nowe rozwiązanie bazowe $\mathbf{X}'_b$ sąsiednie względem rozwiązania dotychczasowego $\mathbf{X}_b$ uzyskujemy poprzez przyjęcie pewnej wartości dodatniej (nieujemnej) przez zmienną wchodzącą do bazy. Wartość, którą przyjmuje zmienna jest określona warunkami:

- z bazy wychodzi jedna zmienna,
- przewozy muszą być nieujemne.

Można łatwo zauważyć, że wzrost przewozu na jakiejś trasie oznacza spadek przewozów do innego odbiorcy w tej samej linii. Dlatego możemy wyróżnić półcykl dodatni i półcykl ujemny. Wartość jaką nadamy wchodzącemu do bazy przewozowi jest równa minimalnej wartości z półcyklu ujemnego (wielkość przewozów zmniejsza się i jeden staje się zerem niebazowym). O tę samą wartość wzrasta każdy element w półcyklu dodatnim. W przypadku, gdy wybór węzła nie jest jednoznaczny (np. dwa elementy w macierzy zerowej mają tę samą wartość ujemną), jako nowy węzeł bazowy przyjmujemy ten, który ma mniejszy

pierwszy wskaźnik (leży w wyższym wierszu). Gdy elementy są w tym samym wierszu, powyższą zasadę przenosimy na drugi wskaźnik.

W przypadku, gdy najmniejszą wartość w półcyklu ujemnym ma więcej niż jeden przewóz, następuje sytuacja, w której przewozem bazowym przestaje być pierwszy z zerujących się przewozów. Pozostałe stanowią przewozy zerowe, to jest takie, które wystąpią w rzeczywistości, gdy wzrośnie zasób towarów w magazynach i potrzeby odbiorców. W przypadku, gdy rozwiązanie bazowe zawiera przewozy zerowe, mówimy o jego zdegenerowaniu. Oznacza to, że przewozy zerowe muszą wystąpić, by w bazie pozostało $n + m - 1$ elementów (jeden przewóz wchodzi, jeden może wyjść z bazy), ale oczywiście nie występują one w rzeczywistości.

PRZYKŁAD 4.9. Znajdź rozwiązanie optymalne ZT z przykładu 5.

Rozwiązanie bazowe o $n + m - 1$ elementach, uzyskane metodą VAM miało postać:

$$\begin{bmatrix} 200 & \bullet & 100 & \bullet \\ \bullet & 200 & \bullet & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

A macierz zerowa tego rozwiązania wyliczona poprzednio wygląda:

$$\begin{bmatrix} \bullet & 1 & \bullet & -1 \\ 2 & \bullet & 6 & \bullet \\ \bullet & 2 & 1 & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

Po dodaniu węzła (1, 4) cykl tworzą węzły (1, 1), (1, 4), (3, 4) oraz (3, 1):

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

Półcykl dodatni tworzą węzły (1, 4) oraz (3, 1), natomiast węzły (1, 1) oraz (3, 4) tworzą półcykl ujemny. Minimalny przewóz w półcy-

klu ujemnym wynosi 100 i odpowiada węzłowi (3, 4). Oznacza to, że kolejne rozwiązanie (w części poza cyklem nie dokonuje się zmian) będzie miało postać:

$$\begin{bmatrix} 100 & \bullet & 100 & 100 \\ \bullet & 200 & \bullet & 0 \\ 100 & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

Potencjały w tym rozwiązaniu, przy przyjęciu $u_1 = 0$, wyglądają jak zostało przedstawione poniżej:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$$

A macierz zerowa:

$$\begin{bmatrix} \bullet & 2 & \bullet & \bullet \\ 1 & \bullet & 5 & \bullet \\ \bullet & 3 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$$

nie zawiera elementów ujemnych, co oznacza, że jest to rozwiązanie (system przewozów) optymalne. Łączny koszt przewozów wynosi: $400 + 300 + 400 + 200 + 200$ co jest równe 1500. Średni koszt przewozu jednej jednostki wynosi zatem 2,5.

4.6. WARUNKI NAKŁADANE NA ROZWIĄZANIE

W zadaniu transportowym o mogą wystąpić takie sytuacje, jakie zdarzają się często w życiu. Niektóre trasy są niedopuszczalne, niekiedy należy przewieźć co najmniej jakąś partię towarów, a innym razem nie więcej niż ustalone w kontrakcie. Sytuacje te stanowią pewne wzbogacenie Zadania Transportowego.

4.6.1. Trasy niedopuszczalne

Kiedy w momencie formułowania zadania transportowego mamy informację, iż określone połączenie pomiędzy i-tym dostawcą a j-tym odbiorcą nie może być rozważane, wówczas w rozpatrywanym zadaniu występują trasy niedopuszczalne. Oznacza to, że zmienna x_{ij} określają-

ce wielkość przewozów na niedopuszczalnej trasie nie może wejść do bazy. Nie można, by nie naruszać warunków zadania, w sposób sztuczny wyeliminować przewozów na jakiejś trasie. Robi się to poprzez ustalenie wysokich kosztów przewozu na danej trasie. Podobnie, jak w programowaniu liniowym stosowana jest metoda kar, tak i w ZT dokonuje się modyfikacji funkcji celu, czyli macierzy kosztów przewozu.

W zadaniach transportowych mamy do czynienia z minimalizacją kosztów przewozu. Dlatego zmienne sztuczne zostaną wprowadzone do macierzy kosztów ze współczynnikami równymi liczbie M , gdzie M jest odpowiednio dużą liczbą dodatnią. Wielkość M dobierana jest tak, by każdemu rozwiązaniu bazowemu, w którym przynajmniej jedna ze sztucznych zmiennych przyjmuje wartość dodatnią, koszty przewozu były większe, niż rozwiązaniu, w którym wszystkie sztuczne zmienne są równe zero. W praktyce jako M wystarczy przyjąć liczbę nie mniejszą od wielkości równej potrojonemu iloczynowi największej wartości współczynnika c_{ij} .

PRZYKŁAD 4.10. Zaproponuj układ współczynników w macierzy kosztów, wiedząc, że pierwszy dostawca nie może dostarczać do drugiego odbiorcy, a drugi dostawca nie może dostarczać do czwartego odbiorcy. Macierz kosztów na trasach dopuszczalnych a także wielkość podaży i popytu przedstawia tabela:

$$\begin{bmatrix} 2 & \bullet & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & \bullet \\ 0 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

W związku z tym, że trasy wykropkowane są niedopuszczalne, a do metody potencjałów konieczne są wszystkie trasy, proponuje się wstawienie w miejsce kropek kar w wysokości trzykrotnej wielkości najwyższego elementu macierzy kosztów $\{5\}$. Zadanie będzie miało postać:

$$\begin{bmatrix} 2 & 15 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 15 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

I rozwiązuje się je w sposób opisany wcześniej.

Przykładem zadania z niedopuszczalnymi trasami, jest niebilansowane zadanie transportowe, w którym któryś dostawca nie ma magazynu. Wówczas fikcyjny odbiorca, jakim jest faktycznie sam magazyn nie może przyjąć (zostawić sobie) towaru. Może się również zdarzyć, że któryś dostawca może składować tylko część oferowanych towarów. Pojemność magazynu określa właśnie tę część. Jest to przykład zadania łączącego trasy niedopuszczalne z zadaniem z ograniczoną przepustowością tras.

4.6.2. Ograniczona przepustowość tras

Zadanie polega na uwzględnieniu warunków postaci: co najmniej, co najwyżej, nie więcej niż, nie mniej niż itp. Mówiąc inaczej chodzi o to, aby zapewnić, żeby w rozwiązaniu optymalnym nadwyżka zasobów u i -tego dostawcy, (która może pozostać w magazynie), nie przekroczyła założonej wielkości (pojemności magazynu). Innym przykładem jest podpisanie kontraktu na zasadzie „bierz więcej niż” czy też „bierz lub płać”. Warunki te traktujemy jako równoważne założeniu, że i -ty dostawca musi wysłać z góry co najmniej zadaną ilość towaru. W związku z tym zasoby u i -tego dostawcy dzielimy na dwie części, z których jedna a'_i oznacza tę ilość, którą dostawca musi wysłać, a druga a''_i może pozostać u niego w charakterze zapasu. W zapisie zadania następuje zastąpienie w tablicy danych wyjściowych dostawcy dwoma poddostawcami i' oraz i'' . Stałe pozostają koszty c_{ij} do wszystkich odbiorców poza odbiorcą fikcyjnym, dla którego koszt będzie trzykrotnością najwyższego z kosztów w macierzy.

Problemem może być zbudowanie tablicy wyjściowej zadania transportowego z ograniczoną przepustowością tras. Należy bowiem rozbić dostawców lub odbiorców tak, by po rozbiciu spełniony został nałożony warunek. W takim przypadku pojawi się zapewne również niedozwolona trasa. Pokazano to na przykładzie, który przedstawia zastosowanie całego algorytmu transportowego¹⁰:

PRZYKŁAD 4.11. Znajdź Metodą KPZ startowe rozwiązanie bazowe ZT i rozwiąż zadanie, wiedząc, że pierwszy dostawca nie może dostarczać do drugiego odbiorcy, drugi dostawca nie może dostarczać do

¹⁰ Innym problemem w Zadaniu Transportowym jest minimalizacja czasu przewozu. Wówczas zamiast kosztów przewozu występują czasy przewozu na trasach. Algorytm jest bardzo podobny do pokazanego dla zwykłej postaci ZT.

czwartego odbiorcy, trzeci dostawca musi co najmniej 50 jednostek dostarczyć do trzeciego odbiorcy. Pozostałe warunki zostały wraz z kosztami przewozu na trasach dopuszczalnych przedstawione w tabeli kosztów poniżej:

$$\begin{bmatrix} 2 & \bullet & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & \bullet \\ 0 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

W pierwszym kroku budujemy właściwą tablicę. Łatwo jest zastąpić punkty kosztami, gdyż w ich miejsce wstawia się liczbę 15.

$$\begin{bmatrix} 2 & 15 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 15 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

Trzeci dostawca musi co najmniej 50 dostarczyć do trzeciego odbiorcy. Oznacza to, że mamy dwie możliwości: rozbić trzeciego dostawcę na dwóch poddostawców i odpowiednio zmodyfikować macierz kosztów:

$$\begin{bmatrix} 2 & 15 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 15 \\ \bullet & \bullet & 3 & \bullet \\ 0 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

lub druga możliwość rozbitie trzeciego odbiorcy na dwóch:

$$\begin{bmatrix} 2 & 15 & 1 & \bullet & 3 \\ 4 & 2 & 2 & \bullet & 15 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 50 & 50 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

Rozwiążmy wariant pierwszy. Startowe rozwiązanie bazowe wygląda:

$$\begin{bmatrix} 200 & 100 & \bullet & \bullet \\ \bullet & 100 & 100 & \bullet \\ \bullet & \bullet & 0 & 50 \\ \bullet & \bullet & \bullet & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

Łatwo widać, że rozwiązanie to nie jest rozwiązaniem dopuszczalnym, gdyż zawiera przewóz przez węzeł (3, 4). Macierz kosztów (wraz z potencjałami) wynosi:

$$\begin{bmatrix} 2 & 15 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 15 \\ 15 & 15 & 3 & 15 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ -2 & -15 & -15 & -27 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 13 \\ 12 \\ 22 \end{matrix}$$

A macierz zerowa, będąca sumą odpowiednich potencjałów i elementów macierzy kosztów ma w tym przypadku postać:

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & -14 & -24 \\ 15 & \bullet & \bullet & 1 \\ 25 & 12 & \bullet & \bullet \\ 20 & 10 & 10 & \bullet \end{bmatrix}$$

Do bazy wejdzie węzeł (1, 4). Cykl będzie miał postać:

$$\begin{bmatrix} 200 & 100 & \bullet & \bullet \\ \bullet & 100 & 100 & \bullet \\ \bullet & \bullet & 0 & 50 \\ \bullet & \bullet & \bullet & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

Minimalne spośród półcyklu ujemnego $\min \{50, 100, 100\}$ jest 50. Dlatego kolejne rozwiązanie uwzględnia wzrost o 50 elementów należących do półcyklu dodatniego i mniejsze o 50 elementy należące do półcyklu ujemnego. Rozwiązanie bazowe ma postać:

$$\begin{bmatrix} 200 & 50 & \bullet & 50 \\ \bullet & 150 & 50 & \bullet \\ \bullet & \bullet & 50 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

Które jest pierwszym dopuszczalnym rozwiązaniem bazowym. Nie występują w bazie elementy reprezentujące trasy niedopuszczalne. Ma-

cięż kosztów z potencjałami wynosi:

$$\begin{bmatrix} 2 & 15 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 15 \\ 15 & 15 & 3 & 15 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ -2 & -15 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 13 \\ 12 \\ -2 \end{matrix}$$

A macierz zerowa:

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & -14 & \bullet \\ 15 & \bullet & \bullet & 24 \\ 25 & 12 & \bullet & 24 \\ -4 & -14 & -14 & \bullet \end{bmatrix}$$

Kolejne rozwiązanie, uwzględniające cykl złożony z węzłów: (1,2), (1,3), (2,2), (2,3):

$$\begin{bmatrix} 200 & 0 & 50 & 50 \\ \bullet & 200 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & 50 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

I macierz kosztów z potencjałami:

$$\begin{bmatrix} 2 & 15 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 15 \\ 15 & 15 & 3 & 15 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ -2 & -15 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 13 \\ -2 \\ -2 \end{matrix}$$

A macierz zerowa posiada elementy ujemne, dlatego do bazy wej-
dzie węzeł (4, 2):

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 15 & \bullet & 14 & 24 \\ 11 & -2 & \bullet & 10 \\ -4 & -14 & 0 & \bullet \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie, uwzględnia cykl utworzony z węzłów: (1,2), (1,4), (4,4), (4,2) i wynosi:

$$\begin{bmatrix} 200 & \bullet & 50 & 50 \\ \bullet & 200 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & 50 & \bullet \\ \bullet & 0 & \bullet & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

Który ma taki sam koszt przewozu, a macierz kosztów z potencjałami wygląda:

$$\begin{bmatrix} 2 & 15 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 15 \\ 15 & 15 & 3 & 15 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ -2 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

A macierz zerowa wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} \bullet & 14 & \bullet & \bullet \\ 1 & \bullet & 0 & 11 \\ 11 & 12 & \bullet & 10 \\ -4 & \bullet & 0 & \bullet \end{bmatrix}$$

Co oznacza, że w dalszym ciągu nie jest to rozwiązanie optymalne. Występuje element ujemny reprezentujący węzeł (4,1). Rozwiązanie, po wprowadzeniu trasy (4,1) wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} 150 & \bullet & 50 & 100 \\ \bullet & 200 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & 50 & \bullet \\ 50 & 0 & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \end{bmatrix}$$

Następna macierz kosztów z potencjałami:

$$\begin{bmatrix} 2 & 15 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 15 \\ 15 & 15 & 3 & 15 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ -2 & -5 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

I macierz zerowa:

•	10	•	•
5	•	4	15
11	10	•	10
•	•	4	4

Nie ma ona już elementów ujemnych, co oznacza, że jest to pojedyncze rozwiązanie optymalne. Jak łatwo widać, rozwiązanie ostatnie spełnia wszystkie nałożone warunki.

ZADANIA DO ROZDZIAŁU 4

4.1. Znajdź startowe rozwiązanie bazowe ZT wykorzystując MKPZ, MME i VAM. Ile wynosi koszt przewozu w przypadku tych rozwiązań?

					dostawcy
	5	4	3	4	80
	4	3	2	3	60
	3	3	1	2	60
odbiorcy	40	50	40	70	

4.2. Znajdź optymalny układ dostarczenia towarów od dostawców do odbiorców, jeżeli koszty transportu reprezentuje następująca macierz:

					dostawcy
	1	2	4	3	70
	2	3	2	3	20
	3	2	1	4	40
odbiorcy	40	30	40	20	

Jak zmienia się koszt transportu w kolejnych rozwiązaniach?

4.3. Znajdź optymalne rozwiązanie zagadnienia transportowego, startując od rozwiązania uzyskanego metodą MMEMK, wiedząc, że czwarty odbiorca musi otrzymać co najmniej 60 jednostek towaru, w tym co najmniej 20 od pierwszego dostawcy:

					dostawcy
	2	3	4	4	60
	4	5	5	1	70
	4	5	5	3	70
odbiorcy	50	50	50	100	

4.4. Rozwiąż zadanie transportowe, startując od rozwiązania bazowego uzyskanego MNEMK, wiedząc, że koszty magazynowania u każdego z dostawców są jednakowe i wynoszą 4, ale pierwszy dostawca nie może magazynować więcej niż 20 jednostek, a trzeci dostawca może wysłać do trzeciego odbiorcy co najwyżej 20 jednostek.

					dostawcy
	5	4	3	4	80
	4	3	2	4	60
	3	3	1	2	60
odbiorcy	40	50	40	20	

4.5. Przeanalizuj zasadność podpisania kontraktu na dostawy od drugiego dostawcy do drugiego odbiorcy w zależności od kosztów transportu na tej trasie. Znajdź wartość kosztów transportu w zadaniu optymalnym w zależności od kosztu przewozu na trasie od drugiego dostawcy do drugiego odbiorcy.

					dostawcy
	5	4	3	4	80
	4	X	2	4	60
	3	3	1	2	60
odbiorcy	30	50	60	60	

4.6. Znajdź optymalne rozwiązanie ZT wiedząc, że pierwszy dostawca musi dostarczyć do pierwszego odbiorcy co najmniej 40 jednostek, a trzeci odbiorca powinien wziąć od pierwszego dostawcy co najwyżej 30 jednostek.

					dostawcy
	5	X	3	2	100
	4	4	2	3	60
	1	3	3	5	60
odbiorcy	60	40	40	60	

4.7. Sprawdź jaki jest koszt skrócenia (maksymalnie) czasu dostaw w stosunku do rozwiązania nie biorącego pod uwagę czynnika czasu¹¹.

¹¹ To znaczy policz najpierw rozwiązanie optymalne bez uwzględniania czasu dostaw, znajdź koszt w tym rozwiązaniu, następnie znajdź zadanie optymalne ze względu na czas (minimalizacja czasu dostaw) i sprawdź, ile wynosić będzie łączny koszt dostaw. Różnica jest kosztem skrócenia czasu dostaw. Porównaj, ile wynosi czas dostaw w pierwszym i drugim rozwiązaniu.

koszt dostaw					dostawcy
	5	4	3	4	80
	4	3	2	4	60
	3	3	1	2	60
odbiorcy	50	50	50	50	

Czas dostaw (godzin)

2	3	4	2
2	2	3	2
3	3	1	4

4.8. Zminimalizuj koszty przewozu, jeżeli podane poniżej dane o przewozach uzupełnione są informacjami: pierwszy dostawca musi dostarczyć co najmniej 20 jednostek do piątego odbiorcy. Odbiorca ten musi uzyskać pełne zapotrzebowanie, to jest 40 sztuk.

					dostawcy
2	3	4	4	4	60
4	5	5	1	1	70
4	5	5	3	3	70
50	50	50	60	40	

Wskazówka: Zadanie nie jest zbilansowane. Wirtualny dostawca będzie miał 50 jednostek. Żadna z tych jednostek nie może trafić do piątego odbiorcy. Poniżej rozwiązanie zadania:

x	x	x	x	4	20 (I)
2	3	4	4	4	40 (I)
4	5	5	1	1	70 (II)
4	5	5	3	3	70 (III)
0	0	0	0	x	50 (W)
50	50	50	60	40	

C=	15	15	15	15	4
	2	3	4	4	4
	4	5	5	1	1
	4	5	5	3	3
	0	0	0	0	15

$x_1^B =$

.	.	20	.	.
0	40	.	.	.
.	.	.	60	10
.	10	30	.	30
50	.	.	.	.

15	15	15	15	4
2	3	4	4	4
4	5	5	1	1
4	5	5	3	3
0	0	0	0	15

-12

0

0

-2

2

-2

-3

-3

-1

-1

potencjały

 $C_1^B =$

1	0	0	2	-9
0	0	1	3	3
2	2	2	0	0
0	0	0	0	0
0	-1	-1	1	16

 $x_2^B =$

.	.	.	.	20
0	40	.	.	.
.	.	.	60	10
.	10	50	.	10
50	.	.	.	.

15	15	15	15	4
2	3	4	4	4
4	5	5	1	1
4	5	5	3	3
0	0	0	0	15

-1

2

2

0

0

0

-5

-5

-3

-3

potencjały

 $C_2^B =$

14	9	9	11	0
4	0	1	3	3
6	2	2	0	0
4	0	0	0	0
0	-5	-5	-3	12

$x_3^B =$

.	.	.	.	20
40	.	.	.	.
.	.	.	60	10
.	10	50	.	10
10	40	.	.	.
15	15	15	15	4
2	3	4	4	4
4	5	5	1	1
4	5	5	3	3
0	0	0	0	15
-5	-5	-5	-3	-3

-1

3

2

0

5

potencjały

 $C_3^B =$

9	9	9	11	0
0	1	2	4	4
1	2	2	0	0
-1	0	0	0	0
0	0	0	2	17

 $x_4^B =$

.	.	.	.	20
40	.	.	.	.
.	.	.	60	10
10	.	50	.	10
0	50	.	.	.

-1

2

2

0

4

potencjały

 $C_4^B =$

10	10	9	11	0
0	1	1	3	3
2	3	2	0	0
0	1	0	0	0
0	0	-1	1	16

$x_5^B =$

.	.	.	.	20
40	.	.	.	.
.	.	.	60	10
10	.	50	.	10
.	50	0	.	.

15	15	15	15	4
2	3	4	4	4
4	5	5	1	1
4	5	5	3	3
0	0	0	0	15

-1
 2
 2
 0
 5

-4 -5 -5 -3 -3 potencjały

 $C_5^B =$

10	9	9	11	0
0	0	1	3	3
2	2	2	0	0
0	0	0	0	0
1	0	0	2	17

 $x_5^B =$

40	.	.	.	20
.	.	.	60	10
10	.	50	.	10
.	50	0	.	.

Łączny koszt przewozu wynosi 550.

Tablica wartości krytycznych rozkładu t-Studenta

α k	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	318,309	636,578
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,600
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,850	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,617	3,090	3,373

BIBLIOGRAFIA

1. Buga J., Nykowski I.: *Zagadnienie transportowe w programowaniu liniowym*, PWN, Warszawa, 1972
2. Borkowski B., Dudek H., Szczęsny W.: *Ekonometria, Wybrane zagadnienia*, PWN, Warszawa, 2003
3. Dębski W., Łapińska-Sobczak N., Markowski K.: *Ekonometria, Elementy teorii, Przykłady i zadania dla uzupełniających studiów magisterskich*, Wyd. UŁ, Łódź, 1994
4. Dorosiewicz S. i inni: *Ekonometria*, OW SGH, Warszawa, 1996
5. *Ekonometria, Zbiór zadań*, praca zbiorowa pod red. Welfe A., PWE, Warszawa, 2003
6. Goldberger A.S.: *Teoria ekonometrii*, PWE, Warszawa, 1972
7. Józwiak J., Podgórski J.: *Statystyka od podstaw*, PWE, Warszawa, 2001
8. Maddala G. S.: *Ekonometria*, PWN, Warszawa, 2006
9. Mycielski J.: *Skrypt do ekonometrii*, WNE UW, Warszawa, 2006
10. Nykowski I.: *Programowanie liniowe, część I*, Wyd. SGPiS, Warszawa, 1972
11. Nykowski I.: *Programowanie liniowe*, PWE, Warszawa, 1984



WSZECHNICA POLSKA

— SZKOŁA WYŻSZA —
TOWARZYSTWA WIEDZY POWSZECHNEJ W WARSZAWIE

Dział Rekrutacji

Pałac Kultury i Nauki

X piętro, pokój 1044 A

tel.: 22 656 62 56

fax: 22 827 76 71

infolinia: 801 033 101

rekrutacja@wszechnicapolska.edu.pl

www.wszechnicapolska.edu.pl